UVT
88

/ERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA
TATEA DE LITERE, FILOSOFIE ŞI ISTORIE
CATEDRA DE FILOSOFIE

IANCU LUCICA

LOGICA MODALĂ

Cuprins:

I. INTRODUCERE 3
1. Conceptul de modalitate 5
2. Principalele tipuri de modalități 9
3. Structura propozițiilor modale 10
4. Notații 16
5. Scurt istoric 17
6. Aplicații 18

II. POLIVALENȚĂ ȘI MODALITATE 34
1. Valoare logică și modalitate 36
2. Analiza axiomatică a unor propoziții modale 39
3. Definiția conceptului de posibil în logica trivalentă 44
4. Aplicații în raport cu pătratul logic al modalităților 48
5. Limitele sistemului trivalent 53
6. Semnificații logice ca semnificații aritmetice 57
7. Interpretarea semantică a sistemelor polivalente 62
8. Aplicații 68

III. IMPLICAȚIE ȘI DEDUCTIBILITATE 70
1. Implicația materială și inferențele deductive 71
2. Paradoxele implicației materiale. Implicația strictă 80
3. Sistemele implicației stricte. Sistemul T 88
4. Bazele alternative ale sistemului T 99
5. Sistemele S 103
6. Câteva obs marginea sistemelor implicației 106
7. Aplicații 111

IV. INTERPRETARE ŞI MODEL 113
1. Problema validităţii în logica modală. 113
2. Ce este semantica logică? 117
3. Conceptul de sistem semantic 118
4. Descrieri de stare şi domenii 122
5. L – conceptele 125
6. Contexte extensionale şi neextensionale 126
7. Semantica lumilor posibile 127
8. Aplicaţii 135

V. PROBLEME FILOSOFICE ÎN PERSPECTIVA LOGICII MODALE 137

ANEXA 1.
Aplicaţii ale metodei raţionamentului diagonal în logică . . 146
ANEXA 2.
De la semantica lumilor posibile la semiotica narativităţii. Comentarii asupra conceptului de lume ficţională la Toma Pavel şi Umberto Eco 161

I. INTRODUCERE

Dacă logica formală a fost apreciată drept cea mai exactă dintre disciplinele filosofice, logica modală ar putea fi apreciată drept cea mai filosofică dintre disciplinele logicii formale. *Exact* şi *filosofic* sunt atunci două dintre trăsăturile de bază ale acestei discipline logice. În ce sens este ea exactă şi în ce sens este filosofică? În primul rând este exactă prin metodă. Logica modernă (*matematică* sau *simbolică* cum mai este ea denumită astăzi) a fost adeseori definită drept "logica formală tratată cu mijloacele matematicii" (Kleene, Godstein, ş.a). Or, toate conceptele şi metodele de sorginte matematică folosite în logica simbolică pot fi întâlnite şi în logica modală. Am putea spune, din acest punct de vedere, că logica modală este exactă în acelaşi sens în care este exactă logica simbolică. A nu se înţelege de aici că logica simbolică (şi cu atât mai puţin logica modală) ar împrumuta pur şi simplu metodele matematice şi le-ar aplica în rezolvarea problemelor proprii. Această înţelegere simplistă a metodei în logica modernă trebuie corectată din capul locului. Logica foloseşte propriile ei concepte şi metode numai că unele dintre acestea se dovedesc a avea proprietăţi similare conceptelor

şi metodelor din matematică. De aici impresia că ele ar fi un "împrumut" din matematică. Am putea spune că aceste concepte şi metode nu ţin nici de matematică nici de logică (sau şi de una şi de alta), ele constituind un fel de "bun comun" la îndemâna ştiinţelor, un fel de "metodologie generală a ştiinţelor", după expresia lui A. Tarski.

În al doilea rând logica modală este exactă prin limbaj. După cum vom vedea ceva mai departe, limbajul logicii modale este format din limbajul logicii simbolice plus câteva simboluri speciale care ţin de specificul ei (în primul rând simboluri pentru modalităţi). După cum arată Hilbert, simbolismul trebuie să ducă în logică la ceea ce a dus el şi în matematică adică la tratarea exactă a conţinutului ei. Prin urmare, limbajul simbolic în logică nu ţine de opţiunea unui autor sau altul, el este impus de însuşi conţinutul logicii, problemele pe care ea le ridică presupun abordarea simbolică. Deci logica modală, ca şi logica simbolică, în general, este exactă şi în ceea ce priveşte conţinutul. Această particularitate a logicii a fost bine surprinsă de Leibniz care spunea despre Aristotel că a fost "primul care a gândit matematic în afara graniţelor matematicii". Prin "matematic" aici trebuie înţeles ceva exact, precis, indiferent că acest *ceva* este sau nu expus în formă matematică. De altfel, în sec. XX Heyting va identifica matematica cu "partea exactă a gândirii noastre" lărgind astfel extensiunea termenului "matematic" dincolo de graniţele lui obişnuite. Despre legătura dintre logica modală şi logica intuiţionistă, în cadrul căreia se exprimă Heyting, vom avea ocazia să vorbim pe larg în această lucrare. Sper ca cititorul să-şi

poată da seama că relațiile dintre logica modală şi logica gândirii matematice sunt mai strânse decât ne-am putea aştepta.

În ce sens logica modală este filosofică? Caracterul filosofic al logicii modale îl putem aprecia din cel puțin trei puncte de vedere: a) al originii ei, b) al conținutului, şi c) al finalității. Atât la Aristotel cât şi la megarici şi stoici, problemele modalității sunt corelate cu probleme strict filosofice (problema substanței, determinismului, problema liberului arbitru, ş.a.). Categoriile filosofice de *necesitate*, *întâmplare*, *posibilitate*, *existență*, *nonexistență* ş.a. îşi găsesc aici cea mai deplină utilizare încât nu cred că cineva mai poate aborda astăzi astfel de probleme fără să facă trimitere într-un fel sau altul la logica modală. O serie de probleme filosofice au fost impuse de conceptul leibnizian de "lume posibilă" care apare acum într-o nouă utilizare. În finalul acestei lucrări voi puncta foarte pe scurt câteva probleme filosofice din perspectiva logicii modale.

1. CONCEPTUL DE MODALITATE; STRUCTURA PROPOZIȚIILOR MODALE

Logica studiată în anii I şi II a fost o logică bivalentă în sensul că propozițiile erau evaluate într-o mulțime cu numai două elemente – adevărul şi falsul. Dacă notăm aceste obiecte cu v şi f iar valoarea propoziției P cu /P/, atunci principiul bivalenței s-ar putea formula astfel:

1) $\forall P. /P/ \in \{v, f\}$

acest principiul legitimează un alt binecunoscut principiu al logicii bivalente, şi anume, principiul terţului exclus: în acelaşi timp şi sub acelaşi raport o propoziţie este sau adevărată sau falsă, a treia posibilitate este exclusă. În formă simbolică:

2) $\forall p.\ p \vee \sim p$

Este uşor de demonstrat că toate conceptele de bază ale logicii formale se sprijină pe aceste principii. De ex. conceptul de *validitate* a inferenţelor: este validă o inferenţă în care dacă premisele sunt adevărate concluzia este şi ea adevărată, şi este nevalidă dacă premisele sunt adevărate şi concluzia falsă.

La o privire mai atentă ne dăm seama că realitatea logică este mult mai complexă şi că adeseori noi formulăm propoziţii care nu mai pot fi evaluate în bivalenţă. Iată şi câteva exemple:

a) 7+5 = 12,

b) Toţi celibatarii sunt necăsătoriţi,

c) Timişoara este cel mai mare oraş din partea de vest a României,

d) În vara anului 2010 România va intra în Uniunea Europeană.

Primele trei propoziţii sunt adevărate, însă, ele nu sunt adevărate în acelaşi fel. Despre primele două spunem că sunt adevărate şi că nu pot fi decât adevărate faţă de a treia care este adevărată dar se poate foarte bine întâmpla ca, la un moment dat, ea să nu fie adevărată. Despre primele două spunem că sunt *logic* sau *necesar* adevărate faţă de a treia care este doar *factual* adevărată. Negaţia unei propoziţii logic adevărată este *logic* falsă sau *imposibil* să fie adevărată. În sfârşit, ultima propoziţie nu este nici adevărată nici falsă ci doar posibilă. Negaţia unei propoziţii posibile va fi tot o propoziţie posibilă.

Nu trebuie să se înțeleagă de aici că numai propozițiile referitoare la evenimente viitoare se sustrag principiului terțului exclus şi al bivalenței. Există şi situații de altă natură pe care le voi exemplifica prin două experimente imaginare (primul este reprodus după J. C. Passeron, al doilea este imaginat de mine).

Experimentul 1. Două trenuri pornesc în acelaşi timp şi avansează unul către celălalt cu viteze egale. O albină sare (cu aceeaşi amplitudine) de pe o locomotivă pe alta până când cele două trenuri se întâlnesc. În momentul întâlnirii albina se află în punctul de contact al celor două locomotive. Trenurile se îndepărtează în aceleaşi condiții şi albina îşi reia salturile de pe o locomotivă pe cealaltă. Întrebarea este pe ce locomotivă se va găsi albina atunci când trenurile vor ajunge în punctele lor de plecare? Răspunsul autorului este că propoziția "Albina se va găsi în punctul *A*"(sau *B*), nu este nici mai adevărată nici mai falsă decât negația ei.

S-ar putea ca un fizician mai scrupulos să afirme că răspunsul corect poate fi dat numai dacă am cunoaşte precis momentul de plecare, viteza de deplasare, amplitudinea salturilor şi alte lucruri de acest gen. Dacă, însă, aceste precizări nu se fac, vom fi nevoiți să spunem, împreună ca J.C. Passeron, că propoziția "Albina se va găsi în punctul A" este doar posibilă. Aici *posibil* se referă la o situație de cunoaştere şi nu la o stare de fapt, ceea ce înseamnă că trebuie să distingem aspectul epistemologic al posibilului de cel ontologic. Analiza lor logică diferă şi reclamă mijloace specifice.

Experimentul 2. La capătul unui culoar întunecos cineva face mişcări circulare cu un punct luminos (să zicem capătul aprins al unei ţigări). Un observator plasat la cealaltă extremitate a culoarului vede aceste mişcări şi nimic altceva. Presupunem acum că viteza de rotaţie a punctului este din ce în ce mai mare până când observatorul va vedea doar un cerc luminos. Întrebarea este: ce raport există între ceea ce observatorul vede şi ceea ce există de fapt? Răspunsul corect ar fi următorul: întrucât există punctul, există cercul şi pentru că el vede cercul, el vede punctul. Orice tangentă la traiectorie poate să întâlnească sau nu punctul, ceea ce corespunde perfect terţului exclus. Să presupunem acum că raza circumferinţei scade până la dimensiuni subatomice în timp ce viteza de rotaţie creşte până la valori apropiate de viteza luminii. Orice tangentă la circumferinţă este acum o tangentă în punct, ceea ce nu mai corespunde principiului terţului exclus.

Propoziţiile analizate ca şi cele două experimente imaginare scot în evidenţă două aspecte: 1) nevoia unor nuanţări în raport cu ideile de *adevăr* şi *fals*, şi 2) situaţii ce ies de sub incidenţa raportului *adevăr-fals*. Şi într-un caz şi în celălalt intervin concepte cum ar fi: *posibil, necesar, probabil, cunoscut, existent* şi încă multe altele de acest tip. O propoziţie afectată de unul sau altul din aceste concepte se numeşte *propoziţie modală*, iar categoriile în cauză se numesc *modalităţi*. Exemple:

"Este posibil să plouă",

"Este necesar ca 7 + 5 = 12",

"Este cunoscut că radical din 144 = 12" etc.

Cu ajutorul negației se pot forma alte propoziții modale. Raportul acestor propoziții poate fi analizat în manieră pur formală, iar condițiile de validitate a inferențelor în care intervin propoziții modale constituie problema de bază a logicii modale. În concluzie, analiza conceptelor şi categoriilor modale, statutul logic al propozițiilor modale, inferențele cu propoziții modale, constituie nucleul logicii modale.

2. PRINCIPALELE TIPURI DE MODALITĂȚI

În limba greacă "alethéia" înseamnă adevăr aşa că prin "modalități aletice" vom înțelege modalități ale adevărului sau, mai exact, modalități în care propozițiile pot fi adevărate. Cele mai importante modalități aletice sunt cele deja invocate – *necesar*, *posibil*, *contingent* şi *imposibil*. În afara modalităților aletice în logica modală se mai studiază:

- modalități deontice *(obligatoriu, permis, interzis, indiferent)*,
- modalități temporale *(întotdeauna, uneori, cândva. niciodată)*,
- modalități epistemice (*cunoscut, verificat, cert, incert* ş. a.),
- modalități existențiale (*existent, inexistent, vid, real* ş. a.),
- modalități doxastice (*cred, mi se pare, sunt convins, îndoielnic, indubitabil*).

Fiecare din aceste categorii modale generează un tip aparte de propoziții care fac obiectul unor teorii distincte. Vorbim, aşadar, de *logică deontică, logică temporală, logică epistemică, logica existenței, logica doxastică,* toate la un loc constituind

teoriile logicii modale. În ultima vreme se vorbeşte despre *logica teologică* ce are ca obiect propoziţii de tipul: "Este scris că ...". Există apoi teorii logice care deşi implică aspecte şi probleme modale nu sunt totuşi logici modale (*logica topologică, logica preferinţei, logica fuzzy*, ş. a.).

De referinţă în aceste sisteme modale este logica modalităţilor aletice şi când spun aceasta am în vedere două aspecte. Întâi, ea este cea mai elaborată şi sistematizată până în momentul de faţă şi înregistrează cele mai semnificative rezultate. Importanţa lor pentru filosofie (şi chiar pentru alte sectoare ale logicii) a fost demult recunoscută. Apoi ea constituie un fel de "model" pentru toate celelalte discipline modale iar mijloacele ei pot fi întâlnite, în forme specifice, în toate aceste discipline. Având în vedere această situaţie în cursul de faţă ne vom ocupa numai de problemele modalităţilor aletice.

3. STRUCTURA PROPOZIŢIILOR MODALE

Reamintesc foarte pe scurt principalele aspecte privind raportul dintre propoziţie şi judecată. Pentru mai multe detalii cititorul poate consulta cursul meu de *Logică generală,* în special capitolul despre limbaj şi capitolul despre propoziţie.

a) Propoziţia aparţine nivelului semiotic al limbajului (semnul cu abstracţie) în timp ce judecata aparţine nivelului conceptual (abstracţia fără semn).

b) Una şi aceeaşi judecată poate fi exprimată prin mai multe propoziții fie în acelaşi limbaj fie în limbaje diferite. Din punct de vedere semantic judecata este *sensul* propoziției.

c) Judecățile sunt adevărate sau false. O propoziție este adevărată (respectiv falsă) numai dacă judecata pe care ea o exprimă este astfel. O propoziție care nu exprimă o judecată nu este nici adevărată şi nici falsă şi, în general, nu poate fi evaluată logic.

d) Două propoziții care exprimă aceeaşi judecată sunt logic (sau formal) echivalente. A nu se confunda echivalența logică cu echivalența materială care înseamnă corespondența propozițiilor în ceea ce priveşte valoarea de adevăr. Propozițiile echivalente logic sunt echivalente şi material, în schimb, echivalența materială nu este întotdeauna şi o echivalență logică.

e) În loc de "judecată" şi "propoziție" unii autori preferă denumirile de "propoziție în sens logic" şi "propoziție în sens gramatical", probabil pentru a evita confuzia cu sensul psihologic al termenului "judecată". Cel puțin deocamdată cred că această problemă nu se pune aşa că vom folosi vechile denumiri cu precizările pe care le-am făcut mai sus. Din motive de simplitate voi vorbi în cele ce urmează numai de propoziții presupunând că aceste propoziții exprimă judecăți.

Propozițiile modale "este necesar ..." şi "nu este posibil non ..." exprimă aceeaşi judecată şi, deci, sunt împreună adevărate sau împreună false şi nu una adevărată şi una falsă. De altfel, echivalența propozițiilor modale constituie, din antichitate şi până astăzi, una din principalele probleme ale logicii modale.

Medievalii au impus o altă distincție cu privire la propozițiile modale care, de asemenea, se studiază şi în zilele noastre. Este vorba de propoziții modale *de dicto* şi propoziții modale *de re*. În propozițiile *de dicto* modalitatea afectează propoziția din "exterior" în genul negației.

"Este posibil să plouă",

"Este imposibil ca doi plus doi să facă cinci",

"Este întâmplător că numărul planetelor este nouă".

La rândul lor, propozițiile modale *de re* sunt propozițiile în care modalitatea afectează propoziția din "interior" în genul propoziției "unii studenți sunt posibil talentați". În limba latină *res (rei)* înseamnă "lucru" aşa că modalitatea se aplică aici termenilor care denotă lucruri. Nu lipsesc nici interpretările în care se consideră că modalitatea priveşte lucrul ca atare, în cazul nostru clasa lucrurilor posibile. Discuția este mai amplă şi vizează distincția dintre aspectul logic şi aspectul ontologic al modalităților, problemă foarte interesantă de care, însă, nu mă voi ocupa aici.

Modalitățile *de re* vizează cu precădere propozițiile de predicație care pot fi analizate după relația subiect – predicat sau, în orice caz, propoziții în care apare într-un fel sau altul funcția copulativă a verbului "a fi". Unii autori, cum este A. Plantinga, consideră propozițiile *de dicto* ca pe un caz particular al propozițiilor *de re* întrucât propoziția neafectată de negație este un fel de subiect în propoziția modală.

Ideea este următoarea. În schema "x este necesar P", x poate sta pentru 9, să zicem, iar P pentru "mai mare ca 7" ceea ce ar da

propoziția "9 este necesar mai mare ca 7", o propoziție modală *de re*. Dar, susține Plantinga, x poate sta şi pentru o propoziție cum este "7 + 5 = 12", iar P pentru predicatul "adevărat" şi atunci obținem propoziția modală *de dicto* "7 + 5 = 12 este necesar adevărată". Ambele propoziții provin din schema *de re,* "x este necesar P". în general, se consideră că modalitățile *de dicto* sunt neproblematice spre deosebire de cele *de re* care ridică probleme. Or, conclude Plantinga, dacă necesitatea *de re* este de "nesusținut", cum pretinde Quine, atunci şi necesitatea *de dicto* este de nesusținut ea fiind un caz particular al necesității *de re.*

După părerea mea, argumentul lui Plantinga nu este în afara oricărei obiecții. Conform celor spuse mai sus, ar trebui ca x din schema "x este necesar P" să fie atât variabilă individuală cât şi variabilă propozițională ceea ce, logic vorbind, nu se poate susține. În logica modală a predicatelor, ca de altfel în orice altă disciplină logică, variabilele individuale şi cele propoziționale sunt variabile distincte. A nu se înțelege de aici că modalitatea *de dicto* nu se mai justifică întrucât ea nu poate fi redusă la una *de re*. Tot ce vreau să spun este că cele două forme de modalitate nu se corelează în acest mod.

La prima vedere distincția *de dicto – de re* nu pare esențială, o propoziție modală putând fi exprimată într-o formă sau alta fără ca valoarea ei de adevăr să fie afectată. De exemplu, propoziția "Unii studenți sunt posibil talentați" este echivalentă cu propoziția "Este posibil că unii studenți sunt talentați".

Să examinăm acum propozițiile:

a) "Nu este posibil ca toți cei înscriși la examenul de admitere să fie admiși" (presupunând că numărul lor este mai mare ca numărul locurilor).

b) "Nu toți cei înscriși la examenul de admitere sunt posibil admiși".

Ambele sunt propoziții modale numai că prima este o propoziție modală *de dicto,* iar a doua este o propoziție modală *de re.* Prima este adevărată, lucru ușor de înțeles, a doua, însă, este falsă. Fiecare candidat la admitere este un posibil admis, altfel, înscrierea lui la un asemenea concurs nu ar avea sens.

Există și situații mult mai complexe care iau forma unui veritabil paradox și în care principala problemă este trecerea de la forma *de dicto* la forma *de re.* Să considerăm pentru început propozițiile:

1) Este necesar că $9 > 7$

2) Nu este necesar că NP > 7

3) 9 este necesar > 7

Toate cele trei propoziții sunt (intuitiv) adevărate. "NP" este prescurtarea expresiei "numărul planetelor".

Propoziția 3) poate fi citită în două moduri:

a) 9 are o proprietate în mod necesar (aceea de-a fi mai mare ca 7),

b) 9 are proprietatea de-a fi "necesar mai mare ca 7".

În primul caz predicatul ar fi "mai mare ca 7", iar în al doilea, "necesar mai mare ca 7".

S-ar părea că propoziția 3) este adevărată în virtutea propoziției 1). Dacă da, atunci putem introduce definiția:

4) (x este necesar F) dacă şi numai dacă (este necesar că (x este F)). În felul acesta modalitățile *de re* sunt explicate (definite) în baza modalităților *de dicto*.

Aplicăm definiția 4) pentru cazul particular în care:

x = 9

F = mai mare ca 7 (simbolic, "> 7").

Pe baza acestor identități din 4) se obține:

5) (9 este necesar > 7) dacă şi numai dacă (este necesar că 9 > 7).

Din 5) şi din 1) se obține 3):

$$(5), (1) \vdash (3)$$

Adăugăm acum identitatea

6) Numărul planetelor = 9,

în baza căreia obținem propoziția:

7) (NP este necesar > 7) dacă şi numai dacă (este necesar că NP>7).

Din 7) şi din 2) se obține:

8) NP nu este necesar > 7

$$(7), (2) \vdash (8)$$

Înlocuim în 8) pe NP cu 9 (în baza def. 6) şi obținem:

9) 9 nu este necesar > 7.

Dar propoziția 9) este negația propoziției 3), ceea ce înseamnă că s-a obținut o contradicție. Situația este întrutotul similară paradoxelor sau antinomiilor logice în care din supoziția de adevăr se obține falsul, şi invers. Ne dăm seama, aşadar, că modalitățile *de re* nu se pot explica prin cele *de dicto*, că ele

reclamă un tip special de analiză logică. De altfel trebuie spus că problema necesității *de re* a generat mari controverse ale căror ecouri se mai fac simțite și în zilele noastre (pentru detalii vezi cartea lui Al. Plantinga *Natura necesității*). În ce privește problema discutată înclin să cred că explicația stă în definiția 6) și în substituția ilegitimă pe care o autorizează ea în 7). Desigur, problema este mult mai amplă însă deocamdată nu dispunem toate detaliile discutării ei.

4. NOTAȚII

Limbajul logicii modale se compune din limbajul logicii simbolice la care se adaugă simboluri speciale pentru modalități. În cursul de față vom folosi notațiile existente deja în uz, respectiv

p, q, r, ...; P, Q, R, ...	variabile propoziționale
$\sim$, $\cdot$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$	operatorii propoziționali *non, și, sau, implică, echivalent.*
L, M, Q, U	operatorii modali *necesar, posibil, contingent* și *imposibil*
(,); [,]; {,}	simboluri auxiliare

Observație. Pentru *posibil* și *necesar* vom folosi și notațiile lui Lewis "$\Diamond$" respectiv "$\Box$". La acestea se adaugă "$\Rightarrow$" (implicația strictă) și "=" (echivalența strictă) despre care vom vorbi în capitolul II. Alte simboluri vor fi introduse pe parcursul expunerii așa că nu le menționez aici. Este vorba în primul rând de simboluri pentru unele concepte metateoretice care au o arie de aplicabilitate mult mai restrânsă.

Dacă L este limbajul logicii modale a cărei sintaxă a fost descrisă mai sus, atunci conceptul de "expresie în L" se defineşte recursiv după cum urmează:

1) P, Q, R, ... sunt expresii în L
2) Dacă α este expresie în L, atunci $\sim\alpha$, $L\alpha$, $M\alpha$, $Q\alpha$, $U\alpha$ vor fi de asemenea expresii.
3) Dacă α şi β sunt expresii atunci $\alpha \cdot \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \equiv \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha = \beta$ sunt expresii.

Este uşor de arătat că următoarele expresii

$$Mp, Lp, Qp$$

$$p \rightarrow Mp$$

$$p \vee (Qp \rightarrow L \sim p)$$

sunt construite prin aplicarea celor trei reguli indicate mai sus. Uneori se mai adaugă şi o regulă de "închidere" care spune că nici o altă expresie nu poate fi construită în L altfel decât prin aplicarea regulilor 1) – 3).

5. APLICAŢII

1) Daţi exemple de propoziţii care să conţină conceptele modale introduse până acum. Înlocuiţi aceste expresii modale cu expresii echivalente din limbajul comun. Care din aceste exemple sunt modalităţi aletice şi de ce?
2) Analizaţi câteva dintre conceptele de bază ale logicii şi arătaţi în ce fel principiul terţului exclus şi principiul bivalenţei sunt indispensabile în aceste analize.

3) Dați exemple de propoziții modale în varianta *de dicto* şi *de re* care să nu fie echivalente.
4) Exprimați în formă simbolică propozițiile cu modalități aletice exemplificate la punctul 1).

6. SCURT ISTORIC

O succintă incursiune în istoria logicii modale ne va uşura înțelegerea unora dintre problemele ei mai importante şi totodată ne va da o imagine mai completă asupra domeniului acestei discipline. Din motive de spațiu mă voi limita la discutarea câtorva momente mai importante, analize mai ample cititorul poate găsi în lucrările menționate la bibliografie. Sper ca cititorul să-şi dea seama de raporturile foarte strânse care există între logica modală şi filosofie.

Se poate spune că logica modală apare într-o formă destul de elaborată la Aristotel deşi problemele modalităților erau cunoscute cu mult timp înaintea lui (în şcolile mici socratice mai ales). Trimiteri la conceptele şi problemele modale găsim practic în toată opera lui Aristotel, cu precădere, însă, ele sunt concentrate în *Organon* şi anume:

Despre Interpretare (cap. 9, 12, 13),
Analitica Primă (cap. 1, 3, 8-22),
Analitica Secundă (cap. 4, 6, 8, 10).

În celelalte lucrări ale *Organonului* (*Topica* şi *Respingerile sofistice*) ca şi în *Metafizica* găsim o serie de definiții şi comentarii ale conceptelor modale care corespund mai mult sau

mai puțin definițiilor lor din *Despre Interpretare* şi *Analitica Primă.*

În esență, contribuțiile lui Aristotel la logica modală ar putea fi rezumate în felul următor:

a) O analiză a principiului terțului exclus şi a principiului bivalenței.
b) O clasificare a propozițiilor după criteriul modalităților.
c) Definițiile principalelor categorii modale şi analiza acestora.
d) Opoziția propozițiilor modale.
e) Conversiunea propozițiilor modale (şi alte inferențe imediate).
f) Silogistica modală.

De ce consider analiza terțiului exclus şi a principiului bivalenței printre contribuțiile lui Aristotel în domeniul logicii modale? Pentru că aceste analize (vezi în special cap. 9 din *Despre Interpretare*) legitimează propozițiile modale la Aristotel. Deşi greu de urmărit, ideea lui Aristotel este că terțul exclus poate fi menținut chiar în condițiile în care se renunță la principiul bivalenței. Se sustrag acestui principiu în primul rând propozițiile referitoare la evenimentele viitoare şi contingente în genul "mâine va fi o bătălie navală". Afirmată astăzi, propoziția nu este nici adevărată, nici falsă ci doar posibilă. Negația unei propoziții posibile este tot posibilă, ideea care îl va inspira mai târziu pe Lukasiewicz în construirea sistemului său trivalent. Dacă, însă, propoziția "mâine va fi o bătălie navală" este doar posibilă, propoziția "mâine va fi o bătălie navală sau mâine nu va fi o bătălie navală" este adevărată.

Istoricii logicii sunt de acord că acest capitol este un adaus ulterior şi că el este îndreptat împotriva megaricilor (vezi argumentul dominator) la care problemele modalităților se integrează discuțiilor lor filosofice privind imposibilitatea mişcării. Obiecția lui Aristotel este că dacă principiul bivalenței ar fi acceptat fără rezerve atunci "nimic nu s-ar produce la noroc sau la întâmplare" ci totul s-ar produce din necesitate, Or, arată mai departe Aristotel, "este indiferent dacă au fost formulate judecățile contradictorii. Căci este evident că lucrurile nu sunt influențate de faptul unei afirmații sau negații din partea cuiva". [1]

Istoricii W. şi M. Kneale critică argumentarea lui Aristotel pe motivul că propozițiile pe care el le analizează sunt deschise sub aspectul timpului (sunt funcții de timp) şi prin urmare nu pot fi evaluate logic. Demonstrația nu-mi este clară şi după câte îmi dau seama ea nici nu s-a impus ca atare.

Coroborat cu cap. 12 din *Despre Interpretare,* cap. 9 conduce la un rezultat care mi se pare esențial pentru întreaga logică modală: conceptele de *adevăr, fals, posibil, necesar,* şi celelalte, pot să apară într-o dublă ipostază în raport cu propoziția: i) ca valori logice ale propozițiilor, şi ii) ca predicate metateoretice. În cap. 9 Aristotel înclină spre statutul de valoare logică a ideii de posibil față de cap. 12 unde aceste concepte apar ca modalități. Semnificativ mi se pare faptul că adevărul apare în acest capitol alături de celelalte concepte modale. Voi relua ideea în capitolul următor unde voi discuta pe larg distincția dintre modalitate şi polivalență.

Probleme speciale ridică definițiile conceptelor modale, în special posibilul şi necesarul care au la Aristotel mai multe sensuri. Iată câteva dintre definițiile mai importante:

"Ceea ce nu poate fi altfel decât este îl numim necesar". [2]

"Posibilul – contrarul imposibilului – se iveşte atunci când contrarul său nu este în chip necesar fals". [3]

"Imposibilul este lucrul al cărui contradictoriu este în chip necesar adevărat" [4]

"Expresia a fi contingent (posibil) se spune în două moduri. Într-un prim sens este ceea ce se întâmplă cel mai des şi este lipsit de necesitate (...). În alt sens posibilul (contingentul) este nedeterminatul, ceea ce poate fi în acelaşi timp astfel şi altfel: de ex: a merge pentru un animal, sau încă, ca un cutremur să se producă în timpul mersului său, sau, într-un chip mai general, ceea ce se întâmplă prin hazard". [5]

Aici ca şi în alte pasaje din *Despre Interpretare,* Aristotel identifică posibilul cu contingentul definindu-l în două sensuri: i) ca opus necesarului (endexomenon), ii) ca opus atât necesarului cât şi imposibilului (danaton). Cu privire la această echivalare autorii W. şi M. Kneale au demonstrat următoarea inconsistență pe care o voi reproduce în limbaj simbolic:

1. $Mp = Qp$ (prin definiție)
2. $Qp \rightarrow Q \sim p$ (o proprietate a contingentului)
3. $Mp \rightarrow M \sim p$ (aceeaşi proprietate formulată pentru posibil)
4. $Lp \rightarrow Mp$ (ceea ce este necesar este şi posibil)
5. $Lp \rightarrow M \sim p$ (dacă este necesar p atunci este posibil non - p).

O altă dificultate în înțelegerea acestor modalități se leagă de faptul că Aristotel nu distinge întotdeauna sensul logic al acestor modalități de sensul lor ontologic. Acest aspect reiese şi din definiția imposibilului pe care am reprodus-o mai sus în care este vorba despre "lucruri imposibile". Dar "lucru imposibil" este una şi "propoziție imposibilă" este alta chiar dacă unii include pe aceasta din urmă în prima. Aceeaşi problemă se întâlneşte şi în legătură cu definiția necesarului, mai ales la definițiile din *Metafizica*. Că la Aristotel problemele logice sunt corelate celor ontologice este clar, interesul nostru deocamdată se leagă de aspectele logice ale problemei.

În sfârşit, o temă de mare interes logic care a reținut îndelung atenția medievalilor vizează echivalența propozițiilor modale. Aristotel studiază aceste echivalențe în cap. 13 din Despre Interpretare şi stabileşte următoarele clase de echivalență:

C1	C2	C3	C4
Mp	~ Mp	M ~ p	~ M ~ p
Qp	~ Qp	Q ~ p	~ Q ~ p
~ Up	Up	~ U ~ p	U ~ p
~ L ~ p	L ~ p	~ Lp	Lp

Se observă că şi aici posibilul este identificat cu contingentul ceea ce înseamnă că echivalările lui Aristotel suferă de aceeaşi inconsistență pe care am discutat-o mai sus.

Silogistica modală (în care includem şi discuțiile despre conversiune) constituie o altă importantă contribuție pe care Aristotel o aduce în domeniul logicii modale. Văzută din perspectiva logicii actuale, silogistica modală la Aristotel se

confruntă cu probleme destul de mari şi acest lucru se datorează în primul rând faptului că el nu dispune de o logică deductivă generală (logica propoziţiilor) care să-i permită să elaboreze şi o logică modală generală. Se pare că metoda lui Aristotel aici constă în înlocuirea premiselor din modurile silogisticii asertorice cu premise modale şi în considerarea acestora după modelul propoziţiilor de predicaţie în care modalităţile sunt un fel de predicat, iar propoziţiile asertorice sunt subiect. Urmaşii lui Aristotel, în special Teofrast şi Eudem, vor încerca să rezolve aceste probleme însă fără rezultate notabile.

În paralel cu Aristotel şi cu tradiţia peripatetică se derulează tradiţia megarico-stoică care s-a bucurat de o mare audienţă în epocă şi care înregistrează rezultate nu mai puţin importante. Întemeietorul şcolii megarice este Euclid din Megara, un contemporan ceva mai bătrân al lui Platon. Lui îi urmează la conducerea şcolii Eubulide din Milet, autor al mai multor paradoxe dintre care celebru până în zilele noastre a rămas paradoxul mincinosului. Printre elevii lui Eubulide întâlnim logicieni de marcă ai antichităţii cum ar fi Diodorus Cronos, Apollonius şi Stilpon din Megara.

Ideea dominantă la megarici este că realul este singurul posibil şi este prezentul actualizat. Posibilul, atunci, este sau ceea ce s-a realizat sau ceea ce se va realiza cândva. Ei au inventat o serie de argumente privind apărarea tezelor eleate în special împotriva mişcării şi a ideii de posibil, dintre care cel mai important este aşa numitul "argument dominator". Expresia sa cea mai clară o găsim la Epictet:

a) Din ceva posibil nu poate rezulta ceva imposibil;

b) Este imposibil ca ceva trecut să fie altceva decât este;

c) Dacă acest lucru ar fi fost posibil într-un moment anterior atunci ar fi luat naştere ceva imposibil din ceva posibil;

d) Este imposibil să se întâmple ceva ce nu se întâmplă efectiv.

Nu toate aceste teze pot fi luate fără rezerve, iar unele comportă îndelungi discuţii. În orice caz, argumente de acest tip i-au obligat pe megarici să recurgă la definirea celor mai importante modalităţi. Iată câteva din aceste definiţii în varianta lui Diodorus Cronus:

Posibil = ceea ce este sau ceea ce va fi,

Imposibil = ceea ce fiind fals nu va fi adevărat,

Necesar = ceea ce fiind adevărat nu va fi fals,

Nenecesar = ceea ce s-au este deja fals sau va fi fals.

Două observaţii pe marginea acestor definiţii: în primul rând predicatele modale se aplică aici numai propoziţiilor şi sunt definite în termeni de adevăr şi fals. Aceasta ar fi o primă deosebire faţă de definiţiile aristotelice ale modalităţilor care, aşa cum s-a văzut, oscilau adesea între planul strict logic şi cel ontologic. În al doilea rând aceste definiţii implică factorul *timp* şi cred că nu greşim dacă îi considerăm pe megarici precursorii logicii temporale ca disciplină distinctă a logicii modale. Ei consideră adevărul propoziţiilor la un moment dat şi nu adevărul în general aşa cum am văzut la Aristotel şi cum se procedează şi astăzi în logică. Tratarea propoziţiilor ca funcţii de timp ridică însă dificultăţi noi, de aceea, găsesc că nu întâmplător logicienii

de primă mărime ai sec. XX s-au oprit îndelung asupra acestei probleme .

Elevul lui Stilpon este Zenon din Citium care întemeiază la Atena (în jurul anului 320 î.e.n.) şcoala stoică. Lui îi urmează Cleante printre ai cărui elevi îi găsim pe Ariston din Chios, Herilos din Cartagina şi Dionisos din Heracleea. Cel mai important succesor în tradiţia stoică este însă Chrisippos din Soloi (281-208 î.e.n.) considerat pe bună dreptate al doilea întemeietor al stoicismului după Zenon . Popularitatea sa crescuse într-atât încât se spunea în epocă că dacă zeii ar avea o dialectică aceasta nu putea fi alta decât cea a lui Crisippos ("dialectică" era denumirea logicii în tradiţia stoică).

Câteva din definiţiile mai importante ale modalităţilor la stoici:

Posibil = ceea ce se admite să fie adevărat cu condiţia ca nimic din împrejurările externe să nu-l împiedice de a fi adevărat (de ex. "Dion trăieşte").

Imposibil = ceea ce nu se admite a fi adevărat în nici o împrejurare (de ex. "Pământul zboară").

Necesar = ceea ce pe lângă faptul de-a fi adevărat nu admite să fie fals sau este împiedicat a fi fals de împrejurări exterioare (de ex. "Virtutea este utilă").

Nenecesar = ceea ce este adevărat dar poate fi şi fals dacă sunt condiţii exterioare care să-l împiedice (de ex. "Dion se plimbă").

Apare la stoici şi o modalitate mai specială, *verosimilul*, definită drept ceea ce are mai multe şanse de-a fi adevărat decât fals (de ex. "Mâine voi fi în viaţă").

Ultimul mare logician al antichității este Boețiu (470-254). El va influența în mod hotărâtor evul mediu de limbă latină atât prin lucrări originale cât şi prin traduceri pe care le face din *Organon*. Aceste traduceri se vor răspândi treptat astfel că în prima jumătate a sec. XII vor circula în universitățile europene toate lucrările *Organonului* aristotelic. Dar primul tratat medieval de logică ce va ține seama de toate scrierile *Organonului* este cartea lui John de Salisbury, *Metalogicon* (1159).

Problema modalităților va ocupa un loc central în logica medievală alcătuind un capitol distinct în preocupările logicienilor din această perioadă alături de *proprietates terminorum, consequentiae* şi *insolubilia*. Abelard, Albertus Magnus, Toma D'Aquino, William de Shyreswood, Petrus Hispanus, William Ockham sunt numai câțiva dintre principalii autori medievali care s-au ocupat pe larg de problemele modalităților. Toma D'Aquino va scrie un tratat – *De Modalibus* – în care discută principalele accepțiuni ale modalității şi în care apare într-o formă explicită distincția de *dicto – de re*. Ideea lui este că o propoziție modală adevărată în varianta *de re* va fi adevărată şi în varianta *de dicto*, fără ca reciproca să fie întotdeauna valabilă.

Spre deosebire de Aristotel, medievalii au înțeles importanța unei teorii generale a deducției de aceea se vor ocupa în mod special de problema consecvenței (sau a consecinței) inclusiv a consecvențelor modale. Iată câteva exemple de consecvențe modale larg discutate în logica medievală:

a) Dacă antecedentul este posibil, consecventul este posibil,

b) Dacă consecventul este imposibil şi antecedentul este imposibil,

c) Dacă consecventul este contingent, antecedentul este contingent sau imposibil.

d) Dacă antecedentul este necesar atunci şi consecventul este necesar.

Aceste consecinţe modale se vor transmite din generaţie în generaţie până în sec. XX constituind punctul de plecare al unor noi tipuri de abordări, aşa cum vom avea ocazia să vedem în capitolele următoare. Şi astăzi scrierile unor autori cum ar fi W. Ockham, Toma D'Aquino, Petrus Hispanus, ş.a. continuă să suscite interesul cercetătorilor.

Dintre autorii moderni mă voi opri foarte pe scurt la G. Leibniz şi Im. Kant. Ei vor schimba în bună măsură abordarea modalităţilor mutând centrul de greutate al discuţiilor de la problemele ontologice la problemele limbajului.

Concepţia despre modalitate la Libniz are atât rădăcini logice cât şi filosofice. Sub aspect logic, fundamentală a fost maniera în care el a înţeles categoria de propoziţie şi anume propoziţia în care predicatul este conţinut în subiect *(predicatum inest subjecto)*. Din această cauză propoziţiile de predicaţie se mai numesc şi astăzi "propoziţii de inerenţă".

Leibniz dă mai multe definiţii necesarului dintre care unele sunt prime şi altele derivate. Deocamdată vom spune, după Leibniz, că o propoziţie este necesară dacă:

a) poate fi redusă la o propoziţie de identitate,

b) dacă negaţia ei implică o contradicţie.

Nu numai propoziţiile necesare ci şi cele contingente au predicatul conţinut în subiect, totuşi, prin nici o analiză, oricât de mult ar fi continuată ea, propoziţia contingentă nu poate fi redusă la o propoziţie de identitate. Numai Dumnezeu, care are o cunoaştere infinită asupra lumii poate vedea în propoziţiile contingente inerenţa predicatului la subiect. În niciun caz, însă, omul, care este o fiinţă limitată.

Pentru a înţelege relaţia dintre propoziţiile necesare şi cele contingente, Leibniz face apel (ca în multe alte situaţii de altfel) la aritmetică:

"Aşa cum un număr mai mare conţine un număr incomensurabil şi oricât s-ar continua rezolvarea nu se va ajunge la o măsură comună, tot aşa în adevărurile contingente nu se va ajunge la o demonstraţie oricât s-ar analiza conceptele ei" [6];

Şi mai departe:

"Din această cauză aflăm acum că propoziţiile care ţin de esenţă şi cele care ţin de existenţa lucrurilor sunt diferite. Esenţiale sunt cu siguranţă cele care pot fi demonstrate prin analiza termenilor adică cele necesare sau virtual identice, iar opusele lor sunt imposibile sau virtual contradictorii. Acelea sunt adevăruri eterne. Ele nu se obţin numai cât timp lumea există, ele s-ar obţine chiar dacă Dumnezeu ar fi creat lumea după un alt plan. Însă faţă de acestea, adevărurile existenţiale sau contingente diferă total. Adevărul lor este înţeles *a priori* doar de intelectul infinit, ele nu pot fi demonstrate prin nici o analiză. Ele sunt de aşa natură că sunt adevărate într-un anumit timp şi nu exprimă doar ceea ce ţine

de posibilitatea lucrurilor ci şi de ceea ce există în mod actual sau va exista în mod contingent dacă anumite lucruri au fost presupuse". [7];

Reţinem din acest pasaj următoarele idei mai importante:

a) Propoziţii necesare = propoziţii de esenţă,
b) Propoziţii contingente = propoziţii de existenţă,
c) Propoziţiile de esenţă pot fi demonstrate prin analiza termenilor din care se compun,
d) Propoziţiile de existenţă (contingente) nu se demonstrează oricât de mult am analiza termenii lor,
e) Propoziţiile necesare sunt virtual identice (pot fi aduse prin demonstraţie la o identitate),
f) Propoziţiile contingente sunt virtual contradictorii,
g) Propoziţiile necesare sunt eterne; cele contingente sunt momentane,
h) Propoziţiile de esenţă sunt adevărate *a priori*; cele de existenţă sunt adevărate *a posteriori*,
i) Propoziţiile de esenţă sunt adevărate în orice lume posibilă (= lume pe care Dumnezeu ar fi creat-o după un alt plan),
j) Propoziţiile de existenţă sunt *a priori* doar pentru intelectul infinit,
k) Propoziţiile de existenţă ţin de actualitatea lucrurilor, ele sunt adevărate doar în această lume şi nu în orice lume posibilă.

Pasajul pe care l-am reprodus din Leibniz conţine ideea de *lume posibilă* care va deveni în sec. XX ideea forţă în semantica logicii modale (numită de aceea şi "semantica lumilor posibile").

Precizez că ideea de "lume posibilă" apare la Leibniz în două contexte, şi anume:

a) O propoziție este necesar adevărată dacă este adevărată în toate lumile posibile.

b) Lumea noastră este cea mai bună dintre toate lumile posibile.

Prima este de natură logică şi ne interesează cu prioritate în această lucrare (vezi cap. IV). A doua este de natură filosofică şi chiar teologică. Dumnezeu a creat lumea din bunătate şi nu din raţiuni logice, de aceea, lumea noastră nu poate să apară decât ca cea mai bună posibilă. Această idee îl va inspira pe Voltaire în romanul său umoristic *Candid*. Din păcate, Voltaire trece aici pe lângă problemă scăpându-i de fapt ceea ce era mai important. Sugerez cititorului o analiză a romanului lui Voltaire din perspectiva ideii leibniziene de *lume posibilă.*

O concepție care va influența mult discuțiile filosofice despre modalitate în sec. XX va dezvolta I. Kant. Tributar logicii aristotelice (pe care o consideră o ştiință încheiată), Kant va prelua şi ideea aristotelică de modalitate pe care o va trata însă într-o manieră proprie. Astfel, în paragraful "Despre funcția logică a intelectului în judecăți" din *Critica Raţiunii Pure,* Kant dă următorul tabel pentru clasificarea propozițiilor:

Cantitate	*Calitate*	*Relație*	*Modalitate*
Universale	Afirmative	Categorice	Problematice
Particulare	Negative	Ipotetice	Asertorice
Singulare	Infinite	Disjunctive	Apodictice.

Astăzi ştim că această clasificare este nesatisfăcătoare sub mai multe aspecte. În ce priveşte clasificarea după modalitate, ea corespunde clasificării pe care o face Aristotel în *Analitica Primă*. "Orice propoziţie, spune Aristotel, indică sau o atribuţie pură, sau o atribuţie necesară, sau o atribuţie posibilă". [8] Corespunzător, vor exista trei tipuri de propoziţii:

a) propoziţii asertorice (cu raportare la ceea ce este real),
b) propoziţii apodictice (cu raportare la ceea ce este necesar),
c) propoziţii problematice (cu raportare la ceea ce este posibil).

Faţă de această clasificare aristotelică este greu de înţeles afirmaţia lui Kant că "modalitatea nu contribuie cu nimic la conţinutul judecăţii (căci afară de cantitate, calitate şi relaţie nu mai este nimic care să formeze conţinutul unei judecăţi) ci priveşte numai valoarea copulei în raport cu gândirea în general".[9] Dacă lucrurile ar sta într-adevăr aşa, atunci un adverb modal ca "posibil" ar ţine exclusiv de domeniul gândirii, ar fi modul particular în care noi gândim propoziţiile şi nimic mai mult. Aceasta ne trimite, cel puţin în problema modalităţii, înapoi la psihologie şi epistemologie.

Desigur, cele mai multe probleme se leagă de distincţiile kantiene *analitic-sintetic, a priori – a posteriori*. Consider cunoscute aceste concepte şi nu insist asupra lor. Precizez, doar, că distincţiile în cauză vizează la Kant numai propoziţiile de predicaţie, propoziţii care pot fi analizate prin relaţia subiect – predicat. Problema care s-a pus, aşadar, şi care a fost intens discutată în filosofia sec. XX este dacă aceste concepte pot fi

redefinite şi pentru alte tipuri propoziţionale. Voi reveni în finalul lucrării asupra acestei probleme.

După Kant, logica modală nu mai înregistrează progrese notabile. De abia spre sfârşitul sec. XIX Hugh McCall va redeschide discuţia asupra modalităţii anticipând întrucâtva ideea de *implicaţie strictă* pe care o vom regăsi la Lewis.

Istoria logicii moderne începe cu G. Frege, mai precis cu anul 1879 când apare lucrarea sa *Begriffsschrift.* Consacrarea se va produce, însă, abia între 1910-13 odată cu apariţia lucrării lui B. Russell şi A.N. Whitehead, *Principia Mathematica.* Este o lucrare de mare anvergură în care statutul logicii matematice apare pe deplin edificat. Sunt elaborate aici, într-o formă aproape definitivă, descipline logice fundamentale cum ar fi logica propoziţiilor, logica predicatelor, logica relaţiilor şi logica claselor. Nici la Frege, însă, şi nici în *Principia Mathematica* nu apare logica modală. Aceasta este o elaborare ceva mai târzie legată în principal de numele lui J. Lukasiewicz şi C.I. Lewis. Se poate spune că odată cu cartea lui Lewis şi Langfard, *Symbolic Logic* (1932) începe noua istorie a logicii modale.

Cum stau lucrurile astăzi? Dată fiind importanţa sa teoretică (şi nu numai) logica modală a cunoscut în sec. XX o dezvoltare extraordinară în care s-au exprimat autori cu mare autoritate cum ar fi A. Church, R. Carnap, O. Quine, S. Kripke, J. Hintikka, şi mulţi alţii. Se poate spune că există în momentul de faţă trei mari tradiţii în ce priveşte dezvoltarea logicii modale. O tradiţie provine din direcţia logicilor polivalente, legată în principal de numele lui J. Lukasiewicz; O voi numi direcţia

"algebrică" în dezvoltarea logicii modale. O altă tradiție își are originea în lucrările lui C.I. Lewis și este direcția "sintactică" în dezvoltarea logicii modale. În sfârșit o a treia direcție, cea semantică, își are punctul de plecare în cercetările lui R. Carnap și se continuă cu semantica lumilor posibile. Fiecare din aceste direcții în dezvoltarea logicii modale va fi examinată în capitolele care urmează.

NOTE

[1]. Aristotel, *Despre Interpretare*, în *Organon*, vol.1, Editura Științifică, București, 1957, pag.226.

[2]. Ibid. pag. 247.

[3]. Aristotel, *Metafizica*, Editura Academiei, București, 1965, pag. 168.

[4]. Aristotel *Despre Interpretare*, pag. 247.

[5]. Ibid. pag. 251.

[6]. Leibniz, G. W., *Opere filosofice*, pag. 45.

[7]. Ibid. pag. 46.

[8]. Kant, I., *Critica rațiunii pure*, Editura Științifică, București, 1969, pag. 25.

[9]. Ibid. pag. 107.

[10]. Kneale, W., Kneale, M., *Dezvoltarea logicii*, vol. 1 și 2, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1974, 1975.

[11]. Dumitriu, A., *Istoria logicii*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.

II. POLIVALENȚĂ ŞI MODALITATE
(Direcția algebrică în dezvoltarea logicii modale)

Prin "logică polivalentă" înțelegem ansamblul sistemelor logice care admit şi alte valori de adevăr pe lângă adevăr şi fals. S-ar mai putea defini aceste sisteme prin raportare la principiul terțului exclus şi principiul bivalenței în sensul că aceste sisteme nu mai admit principiile respective printre principiile lor de bază. Vom avea ocazia să vedem în cuprinsul capitolului de față că problema acestor principii în sistemele polivalente este mult mai complicată şi că ele se regăsesc în structurile mai adânci ale sistemelor în cauză.

Există sisteme cu trei, patru, cinci şi chiar cu un număr infinit de valori. Ele se vor numi sisteme trivalente, tetravalente, pentavalente şi, infinit valente. Sistemele lui Lukasiewicz, Post, Bocivar, Kleene, Reichenbach sunt câteva din sistemele polivalente mai cunoscute. Pentru că sistemele logicii se mai numesc uneori şi "logici", unii autori preferă denumirea de "logici polivalente".

Ideea de polivalență a fost anticipată încă din antichitate, studiată sporadic în evul mediu, şi reluată fără prea mult

entuziasm la sfârşitul sec. XIX şi primii ani ai sec. XX. Adevărata dezvoltare a logicii polivalente începe, însă, cu anul 1920, când polonezul J. Lukasiewicz şi americanul E. Post elaborează primele sisteme de logică polivalentă. Lucrurile au evoluat extrem de rapid astfel că în scurt timp logica polivalentă s-a impus ca o disciplină cu statut autonom în rândul disciplinelor logice. Iată câteva din problemele mai importante din perspectiva cărora se studiază astăzi logica polivalentă:

a) problema valorilor de adevăr,
b) problema interdefinibilității operatorilor propoziționali,
c) probleme privind axiomatizarea,
d) problema aplicațiilor tehnice,
e) probleme privind proprietățile sistemelor axiomatice,
f) problema paradoxelor,
g) problema definirii modalităților,
h) probleme silogistice,
i) problema structurilor matematice,
j) problema aplicațiilor din diferite ştiințe particulare,
k) probleme filosofice.

Aşadar, spectrul aplicațiilor logicilor polivalente este astăzi extrem de vast, de la aplicații tehnice la probleme strict filosofice. De unele din aceste direcții de cercetare se leagă numele unor autori români dintre care se cuvine să-l amintim pe Gr. Moisil. Cercetările lui sunt invocate de autori de prestigiu din domeniul logicii simbolice (A. Prior, A. Heyting, N. Rescher ş.a.).

1. VALOARE LOGICĂ ŞI MODALITATE

Notăm ca şi până acum adevărul cu 1 şi falsul cu 0, iar valoarea logică a unei propoziţii P o vom nota cu /P/. Conform cu principiul terţului exclus o propoziţie este adevărată sau falsă ceea ce s-ar putea exprima astfel:

(1) (P) . /P/ = 1 sau /P/ = 0

Din această formulare a principiului putem construi mai departe alte două propoziţii care de asemenea pot fi adevărate sau false:

a) Este adevărat P,

b) Este fals P.

De exemplu, "Este adevărat că 2 + 2 = 4" şi "Este fals că 2 + 2 = 4". Prima este adevărată, a doua falsă.

În aceeaşi manieră putem studia acum propoziţiile:

c) Este necesar P,

d) Este posibil P,

e) Este contingent P,

f) Este imposibil P.

Propoziţia (1) precum şi derivatele ei a) şi b) legitimează propoziţia

(2) (P) . (P = necesar sau P = posibil sau ... P = imposibil)

Ce se observă aici? Întâi de toate observăm faptul că cele patru concepte care intervin în discuţie (adevăr, fals, necesar, posibil etc.) pot să apară în două ipostaze diferite: i) ca valori logice ale propoziţiilor, şi ii) ca modalităţi ale lor. Reamintesc că Aristotel în cap. 12 din *Despre Interpretare,* include adevărul şi falsul printre categoriile modale. Ideea este destul de stranie dacă

ne gândim că "modalități aletice" înseamnă modalități ale adevărului, iar dacă adevărul şi falsul sunt astfel de modalități atunci ar însemna să vorbim despre adevăr şi fals ca despre alte "modalități" ale adevărului. Probabil că în aceste considerente au prevalat aspectele formale ale problemei şi nu cele de conținut. În orice caz, trecerea de la ipostaza i) la ipostaza ii) şi raporturile reciproce ale acestora fac obiectul logicii polivalente, iar faptul că ipostaza ii) se bazează pe i) face posibilă situarea logicii polivalente ca fundament al logicii modale.

Să studiem acum după metoda matriceală propoziția a) în care expresia "Este adevărat că..." poate fi luată ca un operator de un argument:

P	Este adevărat P
1	1
0	0

Propoziția "Este adevărat P" este adevărată când P este adevărat şi falsă când P este fals, ceea ce înseamnă că putem aserta indicațiile:

(I) Este adevărat P $\rightarrow$ P

(II) P $\rightarrow$ Este adevărat P

(III) Este adevărat P $\overset{\rightarrow}{\leftarrow}$ P

Echivalența (III) exprimă proprietatea fundamentală a adevărului şi stă la baza definiției dată de Tarski: *pentru orice* P, *"P" este propoziție adevărată dacă şi numai dacă P.*

Să aplicăm acest raționament propoziției c) pe care o luăm ca ilustrativă pentru clasa propozițiilor c) - f). În loc să reproducem întregul raționament este mai comod să ne rezumăm la întrebarea: Când este adevărată propoziția "Este necesar P"? Conform cu schema (III) propoziția este adevărată când P este necesară şi este falsă în celelalte cazuri, ceea ce s-ar putea exprima prin următoarea definiție matriceală:

P	Este necesar P
.....	.....
necesar	adevărat
.....	

Propozițiile modale sunt, aşadar, fie adevărate fie false față de propozițiile subordonate lor (pe care le-am simbolizat cu P, Q, R, ...) care pot lua şi alte valori. Vom spune atunci că logica modală se fundamentează pe polivalență şi se exprimă în bivalență.

În sfârşit, o ultimă observație se referă la statutul logic al propozițiilor modale. Strict vorbind, propozițiile modale a) - f) aparțin metalimbajului, ele sunt deci metapropoziții, față de propozițiile subordonate lor care aparțin limbajului obiect. Într-o propoziție cum ar fi "Este necesar P" se exprimă ceva despre P, de aceea, sistemele modale apar ca un fel de metasisteme în raport cu sistemele polivalente corespunzătoare lor. Nu este obligatoriu ca aceste sisteme polivalente să fie întotdeauna efectiv construite, de cele mai multe ori ele apar în raport cu sistemele modale ca

simple potențialități. Probleme interesante sub acest aspect ridică sistemele modale de tip Lewis în raport cu sistemele de logică intuiționistă. În orice caz, după cum s-a putut observa, polivalența este guvernată de principii, bivalente şi invers. Ilustrăm acest lucru pentru calculul propozițional bivalent, după cartea lui Gh. Enescu, *Logica simbolică* [1]. Notăm cu T, C, R conceptele de *tautologie, contradicție* şi *expresie realizabilă* pe care le presupun cunoscute. Luăm aceste concepte în calitate de valori logice şi definim operatorii propoziționali ~, &, ∨, → după cum urmează:

P	~ P
T	C
R	R
C	T

&	T	R	C
T	T	R	C
R	R	R	C
C	C	C	C

∨	T	R	C
T	T	T	T
R	T	R	R
C	T	R	C

→	T	R	C
T	T	R	C
R	T	R	R
C	T	T	T

Cum trebuie să înțelegem aceste definiții? Negația tautologiei este contradicția (şi invers), iar negația unei expresii realizabile este tot o expresie realizabilă. La rândul ei, conjuncția unei tautologii cu o expresie realizabilă va fi tot o expresie realizabilă ş.a.m.d. Sistemul {K, ~, &, ∨, →} unde K = {T, R, C} este un sistem trivalent şi corespunde cu metalogica calculului propozițional bivalent. Acest sistem este izomorf cu sistemul lui Kleene.

2. ANALIZA AXIOMATICĂ A UNOR PROPOZIȚII MODALE

Definiția conceptelor modale în contextul logicilor polivalente a fost dată de J. Lukasiewicz în studiul său *Observații*

filosofice privind sistemele polivalente de calcul propoziţional. [2]

El pleacă de la unele propoziţii modale transmise de logica medievală dintre care cele mai importante sunt:

a) *Ab oportere ad esse, valet consecventia,*

b) *Ab esse ad posse, valet consecventia*

c) *Ab non esse ad non posse, valet consecventia.*

d) *Ununquodque, quando est, oported esse.*

Reprezentative pentru aceste teoreme şi pentru consecinţele lor sunt propoziţiile:

1) Dacă nu este posibil P, atunci non- P.

2) Dacă se presupune non- P, atunci (în baza acestei presupuneri) nu este posibil P.

3) Pentru un P oarecare: este posibil P şi este posibil non- P.

Prima propoziţie se poate obţine din b) prin contrapoziţie; a doua se obţine din d) şi este o teoremă importantă care provine de la Aristotel şi pe care Leibnitz o va prelua în *Théodicéea.* Ea spune că "dacă ceva este, este şi este necesar". Consecinţa ei va fi: "dacă ceva nu este atunci nu este posibil să fie". În sfârşit, a treia propoziţie provine tot de la Aristotel şi vizează propoziţiile despre viitorii contingenţi.

Lukasiewicz exprimă simbolic aceste propoziţii şi le examinează cu ajutorul metodei axiomatice. Regulile de deducţie sunt cele obişnuite, regula substituţiei şi regula detaşării (MP), pe care de asemenea le presupun cunoscute. Pentru început vom lua ca axiome modale primele două propoziţii de mai sus, iar ca axiome nemodale câteva cunoscute proprietăţi ale implicaţiei.

1. $\sim Mp \rightarrow \sim p$

2. $\sim p \rightarrow \sim Mp$

3. $(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

4. $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$

5. $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$

6. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

*

7. $p \rightarrow Mp$

   3,q/Mp, q/P, 1xMP-1

8. $\sim p \rightarrow M \sim p$

   7,p/~p-8

9. $\sim M \sim p \rightarrow p$

   1,q/$M \sim p$, 8xMP-9

10. $\sim M \sim p \rightarrow Mp$

    6,p/~M~p, q/p, r/Mp, 9xMp, 7xMp-10

11. $\sim Mp \rightarrow M \sim p$

    6p/~Mp, q/~p, r/M~p, 1xMp, 8xMp-11

12. $Mp \rightarrow p$

    3p/Mp, q/p, 2xMP-12

13. $M \sim p \rightarrow \sim p$

    12p/~p-13

14. $p \rightarrow \sim M \sim p$

    5P/M~p, q/p, 13xMP-14

15. $Mp \rightarrow \sim M \sim p$

    6p/Mp, q/p, r/~M~p, 12xMP, 14xMP-15

16. $M \sim p \rightarrow \sim Mp$

    6p/M~p, q/~p, r/~Mp, 13xMP, 2xMP-16

Câteva observații pe marginea acestor demonstrații:

a) Tezele 7 - 11 sunt consecințe ale axiomei 1.

b) Tezele 12 - 16 sunt consecințe ale axiomei 2.

c) Tezele 12 16 sunt conversele tezelor 7 - 11.

Aşadar, cine admite axioma 1 şi axioma 2 va trebui să admită implicit că $p \rightarrow Mp \rightarrow \sim M \sim p$ şi reciproc $\sim M \sim p \rightarrow Mp \rightarrow p$ ceea ce înseamnă că $p = Mp = \sim M \sim p$ (= Lp). La fel, $\sim p \rightarrow \sim Mp \rightarrow M \sim p$ şi $M \sim p \rightarrow \sim Mp \rightarrow \sim p$, deci au loc echivalențele: $\sim p = \sim Mp = M \sim p$ (= Up). Prin urmare, postularea axiomelor 1 şi 2 are ca rezultat anularea modalităților (se anulează posibilitățile cu necesarul şi imposibilul cu contingentul).

Să examinăm acum şi un al doilea grup de axiome în care figurează cea de-a treia propoziție modală anunțată la început:

1. $\sim \Pi p \cdot \sim (Mp \cdot M \sim p)$

2. $(Mp \cdot M \sim p) \rightarrow Mq$

3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

4. $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$

Axioma 1 este transcrierea prin De Morgan a propoziției Σp $(Mp \cdot M \sim p)$ care corespunde propoziției despre viitorii contingenți la Aristotel. Axioma 2 este transcrierea modală a uneia dintre proprietățile implicației materiale (falsul implică orice). Axiomele 3 şi 4 sunt axiome nemodale şi corespund contrapoziției implicației materiale.

Observație. Toate demonstrațiile reproduse după Lukasiewicz în acest capitol le-am reformulat în limbajul Peano -

Russell. Am păstrat numai simbolurile originare pentru cuantorul universal (Π) şi particular (Σ).

Regulile de deducţie sunt aceleaşi, plus regula adăugării de universal (simbolizată cu Π). În baza acestor reguli putem demonstra din axiomele 1 - 4 următoarele teze:

5. $\sim Mq \rightarrow \sim (Mp \cdot M \sim p)$

3, p/Mp·M~p, q/Mq, 2x MP-5

6. $\sim Mq \rightarrow \Pi p \sim (Mp \cdot \sim p)$

5xΠ-6

7. $\sim \Pi p (Mp \cdot M \sim p) \rightarrow Mq$

4, p/Mq, q/Πp~(Mp·M~p), 6xMP-7

8. Mp

7, q/p, 1xMP-8

Teza 8 spune că pentru oricare propoziţie p, este posibil ca p să fie adevărată, sau, mai simplu, că totul este posibil, ceea ce este, evident, fals. Din teza 8 şi teza 12, demonstrată anterior, rezultă ca teză expresia p din care printr-o simplă substituţie rezultă o nouă teză, ~ p.

Redau în rezumat principalele rezultate ale demonstraţiilor axiomatice efectuate în raport cu axiomele modale 1 - 3 de mai sus:

a) Axioma 1 conduce la consecinţe adevărate,

b) Axioma 2 conduce la consecinţe false,

c) Axioma 3 la fel,

d) Axiomele 1 şi 2 duc la anularea modalităţilor,

e) Axiomele 2 şi 3 conduc la contradicţii,

f) Axiomele 1 şi 3 conduc la propoziţii false.

După cum se observă rezultatul este negativ peste tot întrucât nici una din aceste situații nu poate fi acceptată din punct de vedere logic.

3. DEFINIȚIA CONCEPTULUI **POSIBIL**

Care este semnificația logică a acestui rezultat? De vreme ce acest rezultat este neacceptabil înseamnă că neacceptabile trebuie să fie şi premisele lui. Acestea sunt axiomele modale 1 - 3, axiomele nemodale 3 - 6, respectiv 3 - 4, regulile de deducție admise. Nici una din aceste premise nu poate fi pusă la îndoială de aceea mai rămâne o singură alternativă - definiția conceptului de *posibil*. Întrebare este: poate fi definit conceptul de *posibil* cu mijloacele logicii bivalente şi, în general, este suficientă logica bivalentă pentru demonstrarea teoremelor modalității? În introducerea acestui capitol am văzut că logica modală se asociază cu ideea de polivalență, acum urmează să demonstrăm efectiv acest lucru şi să creăm o polivalență adecvată propozițiilor modale pe care le-am examinat.

Voi pleca de la observația că în propoziția modală Mp (este posibil p), modalitatea afectează propoziția din "exterior" în genul negației. Ca şi negația, operatorul M este un operator monar (de un singur argument) ceea ce înseamnă că el trebuie să se regăsească printre operatorii monari ai logicii bivalente. Există alci patru asemenea operatori pe care îi definim după cum urmează:

P	v	f
O1p	v	f
O2p	f	v
O3p	f	f
O4p	v	v

Să examinăm în continuare următoarele supoziții:

1) Mp = O1p = p

(Axiomele 1 şi 2 se reduc la propoziții adevărate dar nemodale de ex. p→p şi ~p→~p. În plus axioma 3 este falsă).

2) Mp = O2p = ~p

(Axiomele 1 şi 2 se reduc, iarăşi, la expresii nemodale dar care, de această dată, nu mai sunt teze logice. La fel în ce priveşte axioma 3).

3) Mp = O3p = f

(Axioma 1 va fi falsă, 2 adevărată şi 3 falsă).

4) Mp = O4p = v

(Axioma 1 va fi adevărată, 2 falsă şi 3 adevărată).

Cele patru situații pot fi rezumate în următorul tabel:

	O1p	O2p	O3p	O4p
Ax1	adev.	fals	adev.	fals
Ax2	adev.	fals	fals	adev.
Ax3	fals	fals	adev.	fals

Prin urmare, nu există nici un caz în care cele trei axiome să fie adevărate împreună astfel încât să putem identifica operatorul M.

(posibil) cu unul din cei patru operatori monari ai logicii bivalente. Această situație conduce la următorul rezultat cu valoare de teoremă: *În logica bivalentă nu se poate construi un sistem de logică modală dat fiind că operatorii modali nu pot fi definiți aici.* Acest rezultat confirmă ideea anunțată la început cu privire la raportul dintre modalitate și polivalență.

Dacă operatorul *posibil* nu poate fi construit în logica bivalentă, el se poate construi, totuși, în logica trivalentă în care alături de adevăr și fals Lukasiewicz introduce și o a treia valoare pe care o notează cu 1/2. Noul sistem logic va avea atunci următoarele valori de adevăr:

1 = adevărat (sau adevărat în mod cert),

1/2 = posibil adevărat (sau incert),

0 = fals (sau fals în mod cert).

(Interpretările prin cert - incert sunt date de W. și M. Kneale).

Cu aceste valori, Lukasiewicz dă următoarele definiții pentru implicație și negație.

$\rightarrow$	1	1/2	0	~P
1	1	1/2	0	0
1/2	1	1	1/2	1/2
0	1	1	1	0

În acest sistem trivalent Lukasiewicz dă următoarea definiție pentru posibil:

(1) $Mp = df\ (p \equiv \sim p) \vee \Pi q \sim (p \rightarrow (q \cdot \sim q))$.

(O propoziție este posibil adevărată dacă este echivalentă cu propria sa negație sau dacă nu implică o contradicție). A. Tarski va simplifica definiția posibilului în sensul:

(2) $Mp = df \sim p \rightarrow p$

Definiensul este în definiția lui Tarski antecedentul unei teze a calculatorului propoțional bivalent cunoscută sub numele de *consecvența mirabilia:* $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$. Cunoscută încă de iezuitul Clavius (sec. XVI), această teză va fi folosită de Sacheri și Vaillati în cercetările lor de-a demonstra postulatul V din geometria lui Euclid. Sensul definiției lui Tarski este următorul: dacă o propoziție se poate deriva din propria ei negație atunci ea cel puțin nu poate fi falsă.

Având definiția posibilului putem defini în termeni de implicație și negație ceilalți operatori modali:

(3) $Lp = \sim M \sim p = \sim(p \rightarrow \sim p)$,

(4) $Up = \sim Mp = \sim(\sim p \rightarrow p)$,

(5) $Qp = \sim Lp = (p \rightarrow \sim p)$.

Putem construi cu ușurință definițiile matriciale ale acestor operatori monari având în vedere că matricele pentru implicație și negație le avem deja:

$\rightarrow$	1	1/2	0
Lp	1	0	0
Mp	1	1	0
Up	0	0	1
Qp	0	1	1

Las cititorului ca exerciții calcularea acestor valori ca și alte corelații care se pot face între cele patru concepte modale.

4. APLICAȚII ÎN RAPORT CU PĂTRATUL LOGIC AL MODALITĂȚILOR

Una din problemele de bază ale logicii modale tradiționale o constituie pătratul logic al opozițiilor. Cunoscută de Aristotel, această problemă a fost îndelungat studiată de medievali și s-a transmis în această formă până în zilele noastre. Cum se pune această problemă în sistemul modal pe care tocmai l-am construit?

Notăm modurile, ca și până acum cu L, M, U, Q, iar dictumul cu p. În funcție de cum afectează negația o propoziție modală, medievalii au introdus patru tipuri propoziționale pe care le-au notat cu A, E, I, U. Definim aceste structuri propoziționale prin următorul tabel:

	M	D
A	+	+
E	+	-
I	-	+
U	-	-

Cu M am notat modusul (care poate fi *necesar, posibil, contingent* sau *imposibil*) iar cu D, dictumul. Semnul "+" înseamnă afirmativ, iar "–", negativ. O propoziție de tip A este o

propoziție modală (indiferent de modus) care are modusul afirmativ şi dictumul afirmativ. O propoziție E are modusul afirmativ şi dictumul negativ etc. Determinăm prin tabelul de mai jos toate propozițiile modale de ip A, E, I, U:

	M	Q	U	L
A	(1)	(2)	(3)	(4)
E	(5)	(6)	(7)	(8)
I	(9)	(10)	(11)	(12)
U	(13)	(14)	(15)	(16)

Fiecare număr din tabel se situează la intersecția dintre o linie (corespunzătoare tipului propozițional) şi o coloană (corespunzătoare modusului). De ex. (10) corespunde intersecției dintre I şi Q, deci I(Q), care înseamnă modus negativ (deci ~Q) şi dictum afirmativ (deci p). Deci (10) = IQ = ~Qp. Enumerăm toate propozițiile în această manieră:

(1) = AM = Mp
(2) = AQ = Qp
(3) = AU = Up
(4) = AL = Lp
(5) = EM = M~p
(6) = EQ = Q~p
(7) = EU = U~p
(8) = EL = L~p
(9) = IM = ~Mp
(10) = IQ = ~Qp
(11) = IU = ~Up
(12) = IL = ~Lp
(13) = UM = ~M~p
(14) = UQ = ~Q~p
(15) = UU = ~U~p
(16) = UL = ~U~L

Aceste 16 propoziții nu sunt independente între ele ci sunt echivalente patru câte patru. De exemplu, "posibil p" este echivalentă cu "nu este necesar ~p", deci cele două propoziții, deşi diferite ca formă, exprimă totuşi o singură judecată. Există aşadar patru clase de echivalență în mulțimea celor 16 propoziții, pe care medievalii le-au fixat cu ajutorul a patru cuvinte mnemotehnice:

PURPIREA
AMEBIMUS
ILUACE
EDANTULI

În fiecare din aceste patru cuvinte apar vocale A, E, I, U dar într-o altă ordine. Pentru determinarea claselor de echivalență aplicăm simbolurile A, E, I, U celor patru modalități în ordinea în care apar ele în cele patru cuvinte mnemotehnice:

	M	Q	U	L
C1	U	I	E	A
C2	A	E	I	U
C3	I	U	A	E
C4	E	A	U	I

Precizez că ordinea modalităților în acest tabel nu este întâmplătoare, ea corespunde ordinii din tabelele lui Aristotel (vezi *Despre Interpretare* cap. 13).

Determinăm cele patru clase de echivalență după cum urmează:

C1 = {UM, IQ, EU, AL}

= {~M~p, ~Qp, U~p, Lp}.

C2 = {AM, EQ, IU, UL}

= {Mp, Q~p, ~Up, ~L~p}.

C3 = {IM, UQ, AU, EL}

= {~Mp, ~Q~p, Up, L~p}.

C4 = {EM, AQ, UU, IL}

= {M~p, Qp, ~U~p, ~Lp}.

Fiecare clasă corespunde unei modalități nenegate de aceea putem mai departe stabili identitățile:

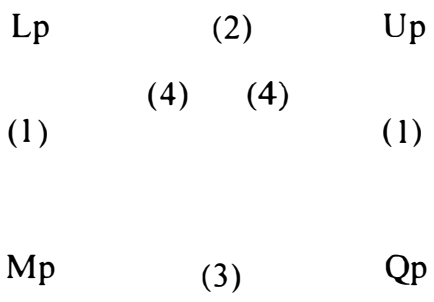
C1 = CL

C2 = CM

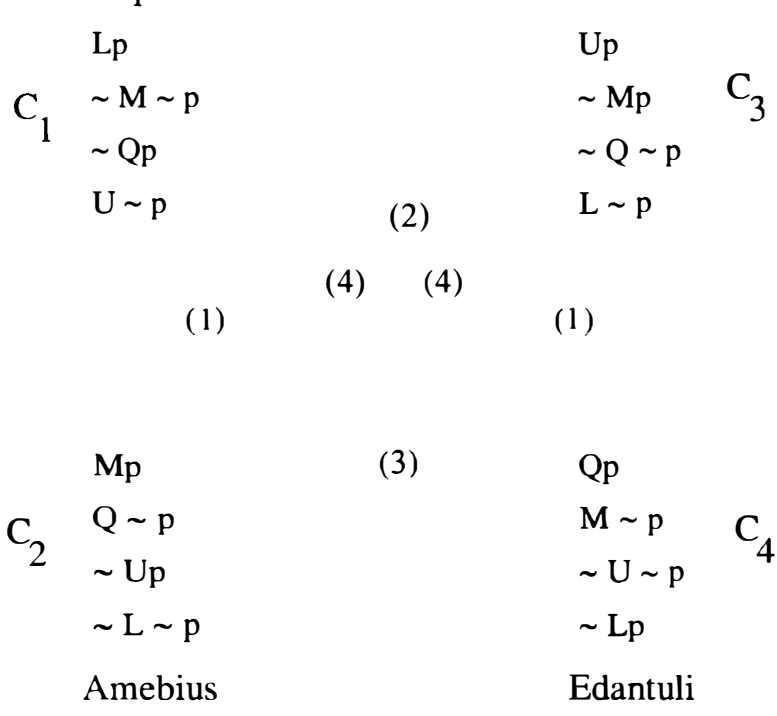
C3 = CU

C4 = CQ

Aşadar, clasa C1 este clasa necesității şi cuprinde toate propozițiile echivalente cu Lp (necesar p). Celelalte clase corespund posibilității, imposibilității şi contingentului. Stabilim acum pătratul logic pentru cele patru modalități în formă afirmativă:



Cu ajutorul identităților de mai sus putem stabili acum pătratul modalităților în forma lui generală:



Reamintesc că:

(1) = subalternare,

(2) = contrarietate,

(3) = subcontrarietate,

(4) = contradicție.

Să exemplificăm acum raportul de contrarietate între propozițiile ~Qp și L~p. Se știe că două propoziții A, B sunt în raport de contrarietate dacă nu pot fi adevărate împreună dar pot fi false împreună. Dacă A este adevărată B va fi falsă, iar dacă B este

adevărată A va fi falsă. Prin implicație și negație (operatori definiți în sistemul trivalent al lui Lukasiewicz) acest raport se exprimă astfel:

$$A \rightarrow \sim B, B \rightarrow \sim A$$

În cazul nostru, cele două propoziții sunt în raport de contrarietate dacă sunt adevărate implicațiile: (1) $\sim Qp \rightarrow \sim L \sim p$, și (2) $L \sim p \rightarrow Qp$. Verificăm aceste implicații cu ajutorul tabelelor de adevăr:

P	~Qp→~L~p			L~p→~~Qp		
1	1	1	1	0	1	0
1/2	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1

În felul acesta pot fi demonstrate toate celelalte raporturi ale pătratului logic.

5. LIMITELE SISTEMULUI MODAL TRIVALENT

Istoric vorbind, sistemul pe care l-am examinat este primul într-o serie de sisteme pe care le vom numi *sisteme* din *familia de sisteme de tip Lukasiewicz.* Am discutat acest sistem numai sub aspectele sale pozitive, altfel spus, m-am rezumat numai la acele probleme le care sistemul oferă o soluție satisfăcătoare. Între acestea figurează definițiile conceptelor modale precum și raporturile din pătratul logic al modalităților. Lukasiewicz va acorda o atenție deosebită acestor raporturi iar în studiul său din 1953 *A System of Modal Logic* [3] el numește "logică modală"

numai sistemele care conțin "sistemul logic fundamental" (*the basic modal logic*). Acest "basic modal logic" nu este altul decât pătratul modalităților pe care acum îl prezintă în formă axiomatizată.

Există şi probleme care nu conduc la o soluție acceptabilă. Să examinăm pentru început următoarele teze:

$$MMp = Mp$$
$$MLp = Lp$$
$$Mup = Up$$
$$MQp = Qp$$
$$QQp = Lp$$

Primele patru teze sunt convergente în ideea că posibilitatea unei modalități este echivalentă cu acea modalitate. De ex. dacă o propoziție este posibil necesară atunci ea este necesară. Cea mai greu de înțeles este însă ultima care spune că dubla contingență este echivalentă cu necesitatea. Într-adevăr, folosind definiția contingenței şi proprietățile posibilului putem stabili echivalențele:

$$QQp = \sim L \sim Lp$$
$$= MLp$$
$$= Lp$$

Într-un sistem polivalent apar mai mulți operatori cu rol de negație şi atunci se pune problema care din aceste negații intervine în reducțiile de mai sus? Ce proprietăți au aceste negații şi ce raporturi există în ele? S-ar putea ca răspunsul la aceste întrebări să aducă o lumină nouă în problemele de mai sus.

În sfârşit, o serie de probleme se leagă de definiţia implicaţiei. Cum trebuie să înţelegem următoarele implicaţii?

$(0 \rightarrow 1/2) = 1$

$(1/2 \rightarrow 0) = 1/2$

$(1/2 \rightarrow 1/2) = 1$

$(1/2 \rightarrow 1) = 1$

$(1 \rightarrow 1/2) = 1/2$

Aceste implicaţii ridică probleme în legătură cu ideea de validitate. Să presupunem că avem un silogism în care conjuncţia premiselor ia valoarea 1/2 (= posibil) şi concluzia valoarea 0 (= fals). Cum este această inferenţă validă sau nevalidă? În general, se spune că validitatea nu are grade dar atunci inferenţa este nevalidă fără ca implicaţia dintre conjuncţia premiselor şi concluzie să fie falsă.

S-ar putea ca aceste probleme ca şi altele de acelaşi gen cu ele să-l fi determinat pe Lukasiewicz să recurgă la o serie de generalizări în raport cu sistemul său trivalent. El studiază cu precădere un sistem tetravalent însă deschide discuţia şi cu privire la posibilitatea unor sisteme mai cuprinzătoare (cu cinci, cu opt şi chiar cu un număr infinit de valori). Iată câteva din valorile de adevăr asociate acestor sisteme:

$V2 = \{0, 1\}$

$V3 = \{0, 1/2, 1\}$

$V4 = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$

.....

$Vn = \{0, 1/n\text{-}1, 2/n\text{-}1, \ldots, n\text{-}2/n\text{-}1, 1\}$

Observăm că toate aceste sisteme cuprind sistemul bivalent ca pe un caz particular. Aceasta pentru că $V2 \subset V3 \subset V4 \subset \ldots \subset Vn$. În legătură cu Vn există două cazuri particulare în care n este infinit discret ($\aleph_0$) sau infinit continuu ($\aleph_1$). Conform unor metateoreme demonstrate ulterior, cele două tipuri de infinit nu afectează conceptul de tautologie propoziționale. Operatorii logici mai cunoscuți se definesc în formă aritmetică:

$$\sim p = 1 - p$$

$$p \cdot q = \min (p, q)$$

$$p \vee q = \max (p, q)$$

$$p \rightarrow q = \begin{cases} 1, \text{ dacă } p \leq q \\ 1 - p + q, \text{ dacă } p > q \end{cases}$$

Pentru n = 2 aceste definiții conduc la definițiile calculului propozițional bivalent; pentru n = 3 la cel trivalent, şi aşa mai departe. Menționez aici că n (numărul valorilor logice admise) poate să fie finit sau infinit. Dacă este infinit el poate fi infinit discret sau infinit continuu. O interesantă corelație apare acum între mulțimea valorilor de adevăr şi mulțimea teoremelor deduse în fiecare sistem în parte:

(a) V_2 T_n (b)

V_3 T_{n-1}

V_n T_2

Figura (a) exprimă raporturile valorice: $V2 \subset V3 \subset \ldots \subset Vn$ unde n este finit sau infinit. Figura (b) exprimă raporturile inferențiale: $Tn \subset Tn\text{-}1 \subset \ldots \subset T2$. În general, $Tm \subset Tn$ dacă există $k > 0$ astfel că $(n\text{-}1) = k(m\text{-}1)$ unde m şi n corespund numărului de valori logice în sistemele Ln şi Lm. Se înțelege că fiecare sistem n- valent astfel obținut conduce la definiții corespunzătoare ale modalităților. Cel puțin unele din problemele pe care le-am semnalat în legătură cu sistemul reapar şi în celelalte sisteme.

6. SEMNIFICAȚIILE LOGICE CA SEMNIFICAȚII ARITMETICE

Toate sistemele n- valente de tip Lukasiewicz sunt construite în baza unei metode cunoscută sub numele de *metoda aritmetizării* în logică. Această metodă constă în:

a) Interpretarea semnificațiilor logice prin semnificații aritmetice,

b) Definirea operațiilor logice ca operații aritmetice.

Aceste forme ale aritmetizării se realizează diferit, de la caz la caz. De ex. în logica bivalentă negația se poate defini prin operația de scădere iar conjuncția prin produs:

1) $\sim p = 1 - p$,s

2) $(p \,\&\, q) = pq$.

Pentru că negația şi conjuncția transcriu orice alt operator rezultă că şi aceşti operatori pot fi dați în formă aritmetică:

3) $(p \rightarrow q) = 1 - p + pq$,

4) $(p \vee q) = p + q - pq$,

5) $(p \equiv q) = 1 - p - q + 2pq$,

6) $(p/q) = 1 - pq$.

Acest gen de definiții aritmetice este foarte util în construcția sistemelor polivalente. Să considerăm de ex. intervalul [-1, 1] în care

1 = adevărat,

0 = neutru (nici adevărat nici fals),

-1 = fals.

Definim acum operatorii logici după cum urmează:

$\sim p = -p$,

$(p \,\&\, q) = \min(p, q)$,

$(p \vee q) = \max(p, q)$,

$(p \rightarrow q) = \max(-p, q)$.

Acest gen de sisteme le vom nota după N. Rescher cu litera U. Construim acum sistemul Us cu valori cuprinse între $-\frac{n-1}{2}$ și $\frac{n-1}{2}$. În mulțimea de valori {-1, 0, 1} operatorii cunoscuți vor avea următoarele matrice:

P	~P
1	-1
0	0
-1	1

&	1	0	-1
1	1	0	-1
0	0	0	-1
-1	-1	-1	-1

$\vee$	1	0	-1
1	1	1	1
0	1	0	0
-1	1	0	-1

$\rightarrow$	1	0	-1
1	1	0	-1
0	1	1	0
-1	1	1	1

$$(p \rightarrow q) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } p - q \leq 0 \\ 0, \text{ dacă } 0 < p - q \leq 1 \\ -1, \text{ dacă } p - q > 1 \end{cases}$$

O serie de sisteme polivalente au fost construite în baza unei metode aritmetice elaborate de St. Jaskowski în studiul său *Recherches sur les systeme de la logique intuitioniste* (1936). Această metodă constă din "produsul aritmetic" a două sau mai multe sisteme.

Fie două sisteme n- valente ($n \geq 2$) pe care le notăm cu S1 şi S2. De la aceste sisteme formăm sistemul produs $S1 \Pi S2$ astfel că:

1) Valorile de adevăr în $S1 \Pi S2$ vor fi perechi ordonate $\langle V1, V2 \rangle$ unde $V1 \in S1$ şi $V2 \in S2$.
2) Valoarea unei propoziţii p este $\langle V1, V2 \rangle$ în $S1 \Pi S2$ dacă valoarea lui p este V1 în S1 şi V2 în S2.
3) Operatorii monari (inclusiv cei modali) se definesc după regula:

$\delta \langle V1, V2 \rangle = \langle \delta V1, \delta V2 \rangle$

4) Operatorii binari se definesc conform cu regula:

$\langle V1, V2 \rangle \Phi \langle V1', V2' \rangle = \langle V1 \Phi V1'; V2 \Phi V2' \rangle$.

Introducem în continuare notaţiile:

$D^+(S)$ = valori desemnate în S (= valori care dau tautologii),

$T(S)$ = Tautologii în S,

$C(S)$ = Contradicţii la S,

$D^-(S)$ valori care dau contradicţii în S.

Există două categorii de sisteme produs, date prin definiţiile:

a) $\langle V1, V2 \rangle \in D^+(S1 \Pi S2) . \overrightarrow{\leftarrow} . V1 \in D^+(S1) \,\&\, V2 \in D^+(S2)$,

b) $\langle V1, V2 \rangle \in D^+(S1 \times S2) . \overrightarrow{\leftarrow} . V1 \in D^+(S1) \vee V2 \in D^+(S2)$,

Câteva metateoreme mai importante relative la cele două tipuri de sisteme produs.

1) $T(S1 \Pi S2) \subset T(S1 \times S2)$,

2) $T(S1 \Pi S2) = T(S1) \cap T(S2)$,

3) $T(S \Pi S) \subset T(S)$,

4) $T(S1 \times S2) = T(S1) \cup T(S2)$,

5) $T(S \times S) \subset T(S)$.

Un alt tip de produs logic se referă la operatori şi constă în produsul logic al operatorilor.

Fie δ un operator binar în S1 şi γ un operator binar în S2. Definim acum produsul $\delta \cdot \gamma$ astfel:

$(p\delta \cdot \gamma q) = <(p\delta q),(p\gamma q)>$, unde $(p\delta q) \in S1$ şi $(p\gamma q) \in S1$.

Un astfel de sistem va construi H. Rasiowa prin produsul dintre implicaţie şi echivalenţă.

Cele mai studiate sisteme produs sunt cele obţinute prin produsul (finit sau infinit) al sistemului propoziţional bivalent cu el însuşi. Să examinăm pe scurt sistemul produs S2xS2. Construim în acest sistem doar matricele pentru implicaţie şi negaţie.

P	$\cdot\sim$ P
(11)	(00)
(10)	(01)
(01)	(10)
(00)	(11)

$\rightarrow$	(11)	(10)	(01)	(00)
(11)	(11)	(10)	(01)	(00)
(10)	(11)	(11)	(01)	(01)
(01)	(11)	(10)	(11)	(10)
(00)	(11)	(11)	(11)	(11)

Pentru comoditate rescriem valorile complexe (11), (10), etc. prin valori numerice simple conform regulilor:

(00) = 0, (01) = 1, (10) = 2, (11) = 3, sau

(00) = 4, (01) = 3, (10) = 2, (11) = 2.

Matricele operatorilor definiți se vor modifica corespunzător acestor reguli:

P	·~ P
1	4
2	3
3	2
4	1

→	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	1	3	3
3	1	2	1	2
4	1	1	1	1

Această metodă aritmetică a fost folosită de Lukasiewicz în construcția sistemului său tetravalent. "În ultimele lucrări, menționează N. Rescher, J. Lukasiewicz a acordat o atenție specială produsului de sisteme, sau cel puțin sistemului particular C2 x C2 de care vorbim acum".

La rândul lui J. Lukasiewicz precizează:

"Când am descoperit în 1920 un sistem logic trivalent, am numit a treia valoare pe care am notat-o cu 1/2, *posibilul.* Mai târziu, după ce am construit sistemele mele modale n- valente, am găsit că numai două dintre ele au importanță filosofică şi anume sistemul 3-valent şi sistemul $\aleph_0$-valent. După cum se ştie, am considerat că ori posibilitatea nu are nici un grad, ceea ce dă sistemul 3-valent, ori are infinitate grade ca în teoria probabilităților şi atunci avem un sistem $\aleph_0$-valent. Această opinie aşa cum cred eu astăzi,

a fost greşită. Sistemul L-modal este un sistem 4-valent cu două valori, 2 şi 3, corespunzătoare posibilităţii, însă ambele valori reprezintă una şi aceeaşi posibilitate în două moduri diferite".[4]

Metoda sistemelor produs care este o altă faţă a metodei aritmetizării a condus şi la un alt rezultat esenţial şi anume, a permis demonstrarea faptului că sistemele modale de tip Lewis sunt sisteme infinitiste, corelate în planul n-valenţei cu sistemele de logică intuiţionistă.

7. INTERPRETAREA SEMANTICĂ A SISTEMELOR POLIVALENTE

Metoda aritmetizării ca şi alte metode de sorginte matematică dau posibilitatea construirii unor sisteme polivalente şi modale cu mult dincolo de limitele la care ne-am fi aşteptat. Ele pun încă odată problema relativismului şi a pluralismului logic pentru că dacă există realmente atâtea logici ce mai este atunci logica? Suntem nevoiţi să admitem relativizarea ideii de *logică* în raport cu fiecare sistem în parte. Voi reproduce în continuare părerile câtorva autori mai avizaţi cu privire la această problemă.
N. RESCHER: "Analiza algebrică a proprietăţilor formale ale sistemelor de calcul propoziţional poate avea o valoare considerabilă în ea însăşi. Totuşi, trebuie spus că ar fi o greşeală să apreciem un astfel de mecanism abstract ca fiind o *logică*".[5]. Şi mai departe "Ceea ce avem este doar un instrument algebric sau combinaţional ce serveşte ca un *selector corect de formule*".[6]

H. SCHOLTZ: "Corect ar fi să se vorbească de *calcule polivalente* şi nu de logici polivalente din cauza faptului că nu orice astfel de calcul are şi o interpretare în termeni logici şi în felul acesta să devină o logică".[7]

P.F. LINKE: "Noi nu avem aici, strict vorbind, o logică ci un formalism logic sau logica în calitate de formalism *(logoide formalismen)*".

Z. JORDAN: "Fără o interpretare care să asocieze o semnificaţie logică definită celor n valori de adevăr, orice calcul n- valent rămâne o structură abstractă. Importanţa studierii acestor structuri nu poate fi negată. Dar, conform opiniei acceptate, venite în ultima vreme de la Wittgensttein, valoarea unui sistem logic constă în inventarierea unei mulţimi de reguli ce au anumite proprietăţi, pentru transformarea expresiilor cu o semnificaţie dată în alte expresii şi astfel în cercetarea proprietăţilor şi relaţiilor fundamentale. Această cerinţă nu este satisfăcută de calculele n-valente abstracte".[8]

Aşadar, problema fundamentală a sistemelor polivalente este cea a interpretării lor. Nu există astăzi o soluţie satisfăcătoare a problemei, cu atât mai mult cu cât varietatea şi diversitatea acestor sisteme este practic nelimitată. Iată ce notează în această privinţă N. RESCHER:

"Interpretarea semantică a logicilor infinit valente este o problemă de o substanţială importanţă, iar pe de altă parte de o substanţială dificultate. Nu se cunoaşte nici o soluţie generală în această problemă a interpretării". [9]

Dacă nu există o soluție generală în problema interpretării, există totuşi soluții particulare (pentru sisteme individuale sau categorii de sisteme). Câteva dintre cele mai importante fiind descrise în continuare.

1) Valorile de adevăr sunt asociate nu cu propoziții ci cu *mulțimi* de propoziții evaluate în bivalență. Această manieră de interpretare vizează cu precădere sistemele din familia de sisteme de tip Post. Este puțin întâlnită şi puțin importantă.

2) Valorile de adevăr sunt asociate nu cu propoziții ci cu funcții propoziționale de un parametru. Un sistem trivalent va avea atunci următoarele valori de adevăr: T = adevărat pentru toate valorile parametrului, F = fals pentru toate valorile parametrului, I = uneori adevărat, uneori fals. Cele mai importante interpretări de acest gen sunt cele de un parametru temporar din sistemele de logică temporară construite de Prior.

3) Valorile de adevăr reprezintă probabilități: adevărat în mod cert, probabil adevărat, probabil fals, fals în mod cert (Keynes, Reichenbach, Zawirski ş.a.).

4) Valorile de adevăr reflectă statutul epistemic al propozițiilor:

T = cunoscut ca demonstrabil,

F = cunoscut ca nedemonstrabil,

I = necunoscut nici ca demonstrabil nici ca indemonstrabil.

Această modalitate de interpretare o putem adapta la teorema lui Gödel de indecidabilitate. Fie A o mulțime de axiome față de care introducem valorile:

Adevărat p = p este derivat din axiome,

Fals p = ~p este derivabil din axiome,

Nedecis p = Nici p nici ~p nu sunt derivabile din axiome.

În această interpretare adevărul şi falsul sunt relative la axiome. Pentru sistemele complete interpretarea conduce la logica bivalentă. Pentru sistemele incomplete în genul PM se ajunge la o logică trivalentă în sensul logicii lui Kleene.

5) Valorile de adevăr reflectă statutul modal al propoziţiilor în schema tradiţională: necesar adevărat, necesar fals, posibil ş.a. Această interpretare, care se leagă direct de logica modală, poate fi definită în termeni de *lume posibilă.* Deocamdată luăm ideea de "lume posibilă" în sensul ei intuitiv. În cap. IV voi relua problema din perspectiva semanticii logicii modale.

Să considerăm că există două lumi posibile w_1 şi w_2 dintre care w_1 este lumea reală. Definim relativ la w_1 şi w_2 următoarele valori de adevăr:

1 = adevărat în w_1 şi adevărat în w_2 (necesar adevărat),

2 = adevărat în w_1 şi fals în w_2 (actual dar nu necesar adevărat),

3 = fals în w_1 şi adevărat în w_2 (actual dar nu necesar fals).

4 = fals în w_1 şi w_2 (necesar fals).

Această interpretare dă următoarele tabele pentru negaţie şi implicaţie:

P	~ P
1	4
2	3
3	2
4	1

→	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	1	3	3
3	1	2	1	3
4	1	1	1	1

Putem considera aceste valori drept valorile obținute în sistemul produs S2 x S2 : (11) = 1, (10) = 2, (01) = 3, (00) = 4. Următorul tabel stabilește corelațiile dintre numărul de lumi posibile (coloana A) și numărul de valori de adevăr (coloana B):

Nr. de lumi posibile	Nr. de valori logice	Valorile logice corespunzătoare	Sistemul produs corespunzător
1	2	{0, 1}	S2
2	2^2	{00, 01, 10, 11}	S2 x S2
3	2^3	{000, 001, ..., 111}	S2 x S2 x S2
		.....	.....

Sistemele lui Lukasiewicz se obțin printr-un produs finit al sistemului bivalent cu el însuși față de sistemele lui Lewis care corespund unor produse infinite.

În sfârșit, o altă interpretare prin lumi posibile este dată mai jos, unde valoarea unei propoziții este o mulțime semantic determinată, și anume mulțimea lumilor posibile în care propoziția este adevărată.

/P/ = {w ∈ W și p este adevărată în w}, sau

/P/ = {w: w∈W și V (w, p) = 1}

unde V este funcția V: w x P → {1, 0}

Operațiile logice ~, &, ∨, → se definesc astfel:

~p = p' (completarea lui p în W),

p · q = p ∩ q,

p ∨ q = p ∪ q,

$p \rightarrow q = p' \cup q$

Operatorii modali se definesc la rândul lor prin:

$$Lp = \begin{cases} 1, \text{ dacă } p = w, \\ 0, \text{ dacă } p \neq w. \end{cases}$$

$$Mp = \begin{cases} 1, \text{ dacă } p \neq \Phi, \\ 0, \text{ dacă } p = \Phi. \end{cases}$$

Să discutăm câteva cazuri particulare:

1) $W = \{w\}$. În acest caz vom avea două valori de adevăr:

$1 = \{w\} = W$ (adevăr)

$0 = \emptyset$ (fals)

2) $W = \{w_1, w_2\}$. În acest caz vor fi 4 valori de adevăr:

$1 = \{w_1, w_2\}$.

$2 = \{w_1\}$

$3 = \{w_2\}$

$4 = \emptyset$

Aşadar, valorile de adevăr în această interpretare sunt submulţimi ale mulţimii potenţiale $P(W) = \{ \emptyset, \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_1, w_2\} \}$.

Ca o concluzie, prin metoda aritmetizării, mai precis prin metoda sistemelor produs, logica polivalentă în varianta lui Lukasiewicz (şi nu numai) devine compatibilă cu ideea leibniziană de *lume posibilă*. Cel mai semnificativ rezultat din acest punct de vedere rămâne, însă, asocierea logicii intuiţioniste, ca sistem polivalent, la sistemele modale de tip Lewis. Despre această problemă vom mai avea ocazia să discutăm în celelalte capitole.

8. APLICAȚII

1. În logica polivalentă apar o serie de valori intermediare între adevăr și fals. Ce alte valori credeți că s-ar mai putea lua în considerare, altele decât cele discutate deja?

2. Comentați raportul dintre principiul terțului exclus și principiul bivalenței. Prin ce se aseamănă și prin ce se deosebesc aceste principii?

3. Comentați pe bază de exemple raportul dintre polivalență și modalitate. Discutați cazul particular al propoziției "Este absurd p". (De ex. când este adevărată propoziția "Este absurd p")?

4. De ce categoriile de *posibil, necesar* etc. nu pot fi definite în logica bivalentă?

5. Comentați pe bază de exemple definiția posibilului la A. Tarski și J. Lukasiewicz. Prin ce se aseamănă și prin ce se deosebesc aceste definiții?

6. Arătați prin metoda tabelelor de adevăr că toate raporturile pătratului logic al modalităților sunt tautologii propoziționale în sistemul trivalent al lui Lukasiewicz.

7. Comparați din perspectiva principiului bivalenței și al terțului exclus sistemul trivalent al lui Lukasiewicz cu capitolul 9 din *Despre interpretare*. Unde se întâlnesc și unde se despart cele două modalități de abordare a problemei posibilului?

8. Care sunt principalele limite ale sistemului trivalent al lui Lukasiewicz? Ce alte neajunsuri credeți că s-ar mai putea invoca în legătură cu interpretarea acestui sistem.

9. Ce este metoda aritmetizării și ce importanță prezintă ea pentru logica polivalentă și modală?

10. Fie S sistemul propoziţional bivalent şi S' sistemul cu trei valori V_S' = {1, *a*, 0} în care *a* = *absurd*. Construiţi sistemul produs SΠS' cu definiţiile principalilor operatori logici.

11. Enumeraţi şi comentaţi principalele interpretări semantice ale sistemelor polivalente. Ce alte interpretări credeţi că s-ar mai putea adăuga?

NOTE

[1]. Enescu, Gh., *Logica simbolică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1971, pag. 182.

[2]. Lukasiewicz, J., *Observaţii filosofice privind sistemele polivalente de calcul propoziţional*, în vol. *Logică şi Filosofie*, Editura Politică, Bucureşti, 1966.

[3]. Lukasiewicz, J., *A System of Modal Logic*, în vol. Lukasiewicz, J., *Selected Works*, Amsterdam-London-Warszawa, 1970, pag. 352.

[4]. Lukasiewicz, J., *Observaţii filosofice...*, în vol. citat pag. 371.

[5]. Rescher, N., *Many Valued Logic*, New York, St. Louis, 1969, pag. 106.

[6]. Ibid. pag. 106.

[7]. Citat după N. Rescher [5], pag. 107.

[8]. Ibid. pag. 108.

[9]. Ibid. pag. 107.

III. IMPLICAȚIE ȘI DEDUCTIBILITATE
(Direcția sintactică în dezvoltarea logicii modale)

În acest capitol voi prezenta sistemele modale ale implicației stricte. Aceste sisteme se prezintă sub forma unor sisteme sintactice în care categoria de *posibil* este luată ca idee primă (nedefinită), iar categoriile de *necesar*, *imposibil* și *contingent* ca idei derivate (introduse prin definiție). În toate aceste sisteme categoria centrală este implicația strictă introdusă de C.I. Lewis în două etape. Prima etapă corespunde cărții sale din 1918, *A Survey of Symbolic Logic.* Cartea se vrea o alternativă a logicii din *Principia Mathematica* prin faptul că propune un nou concept de implicație. În elaborarea acestui concept Lewis a fost inspirat de cartea lui Hugh Mc. Coll *Symbolic Logic and Its Applications* (London, 1906). A doua etapă o reprezintă cartea lui Lewis și Langford din 1932 *Symbolic Logic* în care conceptul de implicație strictă este mult mai bine conturat și în care sunt construite cinci sisteme modale sub numele de sisteme S1-S5.

1. IMPLICAȚIA MATERIALĂ ȘI INFERENȚELE DEDUCTIVE

Consider că cea mai bună introducere în problemele implicației stricte o reprezintă implicația materială și raporturile ei cu inferența deductivă. Așa cum se știe, implicația materială este relația fundamentală a logicii considerată, pe bună dreptate, suportul oricărei inferențe de tip deductiv. Întrucât orice raționament poate fi exprimat printr-o implicație, și invers, se pune în mod firesc întrebarea: care este relația dintre starea logică a unui raționament și starea logică a propoziției implicative către corespunzătoare?

Un raționament deductiv este valid sau nevalid, în timp ce o propoziție implicativă este adevărată sau falsă. Întrebarea privind raportul dintre implicație și raționament se "traduce" atunci în întrebarea privind raportul dintre adevăr și validitate. Un exemplu simplu ne va ajuta să înțelegem mai ușor cum stau lucrurile. Pentru început să examinăm următoarele raționamente:

Toți oamenii sunt ființe raționale	Toate mamiferele sunt vertebrate
Toți oamenii sunt ființe sociale	Toate felinele sunt vertebrate
Unele ființe sociale sunt ființe raționale	Toate felinele sunt mamifere

Starea logică a celor două raționamente se poate testa prin metoda contraexemplului. După cum se știe, această metodă constă în două operații: 1) se detașează forma logică a raționamentului în cauză, și b) se determină valoarea premiselor și

concluziei pentru diferitele sisteme de valori ale variabilelor ce intră în componența respectivelor forme. În cazul nostru se obțin următoarele forme de raționament:

(I)	(II)
Toți A sunt B	Toți A sunt B
Toti A sunt C	Toti C sunt B
Unii C sunt B	Toți C sunt A

Urmărim acum valoarea logică a premiselor şi concluziei pentru diferite sisteme de valori ale variabilelor.

(1)	(1')
A = om	A = mamifer
B = ființă rațională	B = vertebrat
C = ființă socială	C = felină
Premise adevărate	premise adevărate
Concluzie adevărată	concluzie adevărată

Observație. Pentru aceste valori ale variabilelor A, B, C, cele două forme inferențele conduc la silogismele pe care le-am luat ca punct de plecare.

(2)	(2')
A = ființă bipedă	A = ființă rațională
B = talentat	B = ființă extraterestră
C = om	C = om
Premise false	premise false
Concluzie adevărată	concluzie adevărată,

(3)	(3')
A = om	A = om
B = amfibie	B = amfibie
C = maşină	C = maşină
Premise false	premise false
Concluzie falsă	concluzie falsă,

Observaţie. Pentru acelaşi sistem de valori ale variabilelor cele două forme inferenţele se comportă la fel.

(4)	(4')
A = ?	A = american
B = ?	B = om
C = ?	C = român
Premise adevărate	premise adevărate
Concluzie falsă	concluzie falsă,

Se poate uşor observa că între cele două forme inferenţiale a apărut o primă şi fundamentală deosebire: nu există nici un sistem de valori ale variabilelor A, B şi C care să transforme forma I în raţionament cu premise adevărate şi concluzie falsă. În schimb, forma (II) admite un asemenea sistem de valori. În baza acestei proprietăţi introducem acum definiţia conceptului de *validitate*.

Definiţie. Un raţionament deductiv este valid dacă premisele lui susţin se aşa manieră concluzia încât presupunând că premisele lui sunt adevărate este imposibil pentru concluzie să fie falsă.

(A se vedea rolul conceptului modal de *imposibil* în formularea acestei definiții. Găsiți și alte exemple de definiții în logică în care să intervină concepte modale).

Un raționament este nevalid dacă premisele lui sunt adevărate și concluzia falsă. Orice raționament este sau valid sau nevalid și nu există stări intermediare între acestea. Altfel spus, nu există raționamente care să fie cel mult valide și cel puțin nevalide. Rezumăm situația de mai sus în următorul tabel:

Premise	Concluzie	Validitate
(1) adevărat	adevărat	?
(2) adevărat	fals	nevalid
(3) fals	adevărat	?
(4) fals	fals	?

După cum se observă, cazurile (1), (3) și (4) sunt nerelevante pentru starea raționamentelor întrucât caracterizează atât raționamentele valide cât și pe cele nevalide. Relevant este doar cazul (2) în care raționamentul este nevalid. Relativ la acest caz P. Hurley face o apreciere care merită reținută:
"Orice argument deductiv cu premise adevărate și concluzie falsă este în mod necesar nevalid. Acesta este poate cel mai important fapt din toată logica deductivă". [1]

Cum trebuie apreciate din punct de vedere intuitiv raționamentele valide în care premisele sunt false și concluzia falsă (sau adevărată)? De ce aceste raționamente pot fi valide?

Trebuie spus că validitatea nu depinde decât indirect de valoarea logică a propozițiilor. Putem reformula problema în felul următor: dacă premisele unui raționament valid ar fi adevărate, în aceste condiții şi concluzia ar fi adevărată (sau ar fi imposibil pentru concluzie să fie falsă, ceea ce, este acelaşi lucru). În cursul meu de *Logică Generală* am abordat această problemă în termeni de *lumi posibile.* Fie A, B ⊢ C un raționament deductiv. Presupunem că există o lume posibilă în care A şi B sunt propoziții adevărate. Cum este în această lume posibilă propoziția C, adevărată sau falsă? Dacă propoziția C este adevărată raționamentul este valid. Aceasta înseamnă că este valid acel raționament pentru care există cel puțin o lume posibilă în care premisele fiind adevărate concluzia nu poate fi falsă. Presupunând că există o lume posibilă în care toți oamenii sunt ființe zburătoare şi toate patrupedele sunt de asemenea ființe zburătoare, în această lume posibilă nu este obligatoriu ca toate patrupedele să fie oameni de aceea raționamentul este nevalid.

Se întâmplă destul de rar în vorbirea curentă să folosim raționamente valide cu premise false, de aceea, cele două cazuri de validitate trebuie distinse folosind pentru raționamentele valide cu premise adevărate un cuvânt special. În limba engleză este folosit în acest scop cuvântul *sound* care înseamnă "bun", "capabil", "rezonabil", "temeinic". Niciuna din aceste semnificații nu poate fi folosită în limba română, de aceea, în lipsa unui echivalent românesc mai potrivit, propun termenul *veridic.*

Raționament veridic	=	Raționament valid	+	Premise adevărate

Un raționament este neveridic dacă:

a) este valid și are premise false și concluzia adevărată sau falsă,

b) este nevalid (premise adevărate și concluzia falsă),

c) este nevalid cu premise false și concluzia adevărată sau falsă.

A nu se înțelege din cele spuse mai sus că raționamentele valide neveridice sunt complet lipsite de importanță. În practica științifică se formulează adeseori ipoteze despre care nu se știe dacă sunt adevărate sau false. Se știe în schimb că raționamentele care se fac cu aceste ipoteze sunt valide. Dacă consecințele acestor ipoteze sunt false, ipoteza trebuie revizuită sau chiar abandonată. Dar toate aceste revizuiri au fost posibile numai pentru că raționamentele în cauză au fost valide. Deși valide, ele sunt totuși neveridice.

Cu aceste precizări să revenim la problema implicației. Raporturile foarte strânse dintre implicație și raționament se datorează faptului că orice raționament poate fi reformulat ca o implicație și invers. În loc de

(1)
Toți A sunt B, și
Toți A sunt C, deci
Unii C sunt B.

putem spune:

(2)
Dacă Toți A sunt B și
Toți A sunt C, atunci
Unii C sunt B.

Între (1) şi (2) există o deosebire fundamentală: (1) este raţionament şi ca atare el poate fi valid sau nevalid; (2) este propoziţie şi poate fi adevărată sau falsă. Ce raport există atunci între validitatea (respectiv nevaliditatea) raţionamentelor şi adevărul (respectiv falsul) implicaţiilor corespunzătoare lor? Răspunsul nu este greu de intuit. Dacă raţionamentul este valid, implicaţia corespunzătoare lui nu poate fi falsă iar dacă este nevalid implicaţia nu poate fi adevărată. Dar când este raţionamentul valid, sau, mai precis, când poate fi el valid? După cum s-a văzut există trei cazuri în care raţionamentul este valid şi anume:

a) premisele sunt adevărate, concluzia adevărată,
b) premisele sunt false şi concluzia adevărată,
c) premisele sunt false şi concluzia falsă.

În aceste trei cazuri şi implicaţia este adevărată. Dacă, în schimb, premisele sunt adevărate şi concluzia falsă, raţionamentul este nevalid iar implicaţia falsă.

Notăm acum cu P premisele, cu Q concluzia *v*-adevărul / falsul şi reformulăm definiţia implicaţiei cu ajutorul tabelului de adevăr:

P, Q	$P \rightarrow Q$
v v	*v*
v f	*f*
f v	*v*
f f	*v*

Aceasta este *implicația materială* și definiția ei matricială. În loc de "P → Q" s-au mai folosit notațiile: $\vdash\!\!\begin{array}{l}Q\\ \lfloor P\end{array}$ (Frege), P ⊃ Q (Russell), P ⊂ Q (Lewis), Cpq (Lukasiewicz). În mod obișnuit "P → Q" se citește "P implică Q" sau dacă "P atunci Q".

Ideea de implicație ca fundament al raționamentului deductiv a fost introdusă de către G. Frege în lucrarea sa din 1879 *Begriffsschrift*. De abia, însă, cu *Principia Mathematica* se poate vorbi de "implicația materială" în sensul curent al termenului. Iată pasajul din vol.I al PM în care este definit acest concept:

"Când o propoziție q urmează dintr-o propoziție p, altfel spus, când p fiind adevărată și q trebuie să fie adevărată, spunem că p *implică* q. Ideea de implicație, așa cum avem nevoie de ea aici poate fi definită. Înțelesul (meaning) ce va fi dat în cele ce urmează poate să apară la prima vedere ca ceva artificial; cu toate că există și alte sensuri legitime, cel adoptat aici este de departe cel mai convenabil pentru scopurile noastre față de oricare dintre rivalii săi. Proprietatea esențială cerută implicației este aceasta: "ceea ce este implicat de o propoziție adevărată este adevărat". În virtutea acestei proprietăți implicația produce demonstrația. Însă această proprietate nu determină în nici un fel dacă ceva este implicat de o propoziție falsă și, dacă, da, ce anume, ceea ce determină ea este că, dacă p implică q atunci nu poate fi cazul că p este adevărată și q fals, adică ori p trebuie să fie fals ori q adevărat. Cea mai convenabilă interpretare a implicației este că, dacă p este fals sau q adevărat atunci "p implică q" este adevărat.

Din această cauză "p implică q" poate fi definitivă prin "ori p este fals ori q este adevărat".

$p \supset q. = . \sim p \vee q$ Df. 1.01.

.....

În virtutea acestei definiții când $p \supset q$ are loc, atunci ori p este fals ori q este adevărat; de aceea dacă p este adevărat, q trebuie să fie adevărat. Astfel, definiția de mai sus păstrează proprietatea esențială a implicației. Ea dă, practic, cel mai general înțeles compatibil cu păstrarea acestei proprietăți" (PM, I, 94).

Pasajul reprodus din PM conține ideile de bază cu privire la implicația materială. Se poate spune că dezvoltarea extraordinară pe care a cunoscut-o logica după apariția *Principiei* se datorează, între altele, şi ideii de implicație, aşa cum a fost definită ea aici. Cu toate acestea ar fi greşit să se creadă că implicația se datorează în mod exclusiv logicii moderne. După cum am văzut în *Introducere* medievalii s-au ocupat pe larg de problema consecințelor iar anticii dispuneau de două concepte ale implicației. Unul i se datorează lui Filon, celălalt lui Diodorus Cronus. Cititorul poate compara pasajul de mai sus reprodus din PM cu următorul pasaj din Sextus Empiricus cu privire la implicația filoniană:

"Astfel, sunt trei moduri în care un condițional poate fi adevărat şi unul în care el poate fi fals. Căci un condițional este adevărat când începe cu un adevăr şi se termină cu un adevăr, ca în cazul "Dacă este ziuă este lumină"; este adevărat, de asemenea, când începe cu un fals şi se termină cu un fals, ca "Dacă pământul zboară, are aripi" şi, în mod similar, un condițional care începe cu un fals şi

se termină cu un adevăr Este ca atare adevărat, că "Dacă pământul zboară. pământul există". Un condițional este fals numai când începe cu un adevăr şi se termină cu un fals, ca "Dacă este zi, este noapte". (Cf. W. şi M. Kneale – *Dezvoltarea logicii I,* pag. 144 - 45).

Asemănarea cu ideea de implicație la Russell este atât de mare încât toți istoricii logicii reproduc, când discută acest pasaj, definiția matricială a implicației materiale dată mai sus. Diodorus va critica definiția filoniană a implicației pe motivul că propozițiile cu rol de antecedent şi consecvent în implicație sunt deschise sub raportul timpului şi, ca atare, condițiile de adevăr cerute de definiția implicației nu se mai respectă. El va propune un nou concept de implicație în care sunt antrenate modalitățile temporare. Încercările care se fac de a asimila implicația diodoriană când cu implicația strictă când cu implicația formală nu mi se par convingătoare, de aceea, înclin să cred că implicația diodoriană trebuie tratată ca un tip aparte de implicație.

2. PARADOXELE IMPLICAȚIEI MATERIALE. IMPLICAȚIA STRICTĂ.

Implicația materială exprimă într-un mod satisfăcător relația dintre premisele şi concluzia unei inferențe deductive, însă, aşa cum a fost definită mai sus, implicația materială are o serie de proprietăți greu de înțeles din punct de vedere induitiv. Iată câteva dintre cele mai importante în varianta lui Lewis.

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(Dacă p este adevărată atunci p este implicat de orice propoziție q).

2) $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$

(Dacă p este falsă atunci p implică orice propoziție q). Sintetic, cele două proprietăți exprimă faptul că falsul implică orice (și adevărul și falsul) în timp ce adevărul este implicat de orice (și de adevăr și de fals). Potrivit acestor proprietăți ar trebui să admitem ca adevărate implicațiile: "Dacă luna este făcută din brânză verde atunci 2 + 2 = 4" (exemplu lui Lewis). Din această cauză cele două proprietăți ale implicației sunt cunoscute sub denumirea de "paradoxele implicației materiale". Nu mai puțin stânjenitoare sunt și următoarele proprietăți:

3) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

(Pentru oricare propoziții adevărate p, q, sau p implică q sau q implică p).

4) $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow p$

(Dacă p nu implică q (oarecare) atunci p este adevărată).

5) $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$

(Dacă p nu implică q atunci p implică falsul lui q).

6) $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

(Dacă p nu implică q atunci "p este fals" implică q).

7) $(p \,\&\, q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow p))$

(Dacă p și q sunt adevărate atunci p implică q și q implică p).

8) $(\sim p \,\&\, \sim q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow p))$

(Dacă p și q sunt false atunci p implică q și q implică p).

Aceste proprietăți, arată Lewis, ne îndepărtează foarte mult de sensul obişnuit al termenului "implică". Problema constă în aceea că implicația materială este o relație pur extensională, ea ține cont doar de valoarea logică a propozițiilor, nu şi de a conținuturilor lor. Noul concept de implicație propus de Lewis numit "implicație strictă, simbolizat cu "p $\prec$ q", conține implicația materială ca pe un "sistem parțial" plus relațiile intensionale ale propozițiilor. "Implicația strictă conține implicația materială, aşa cum apare ea în PM, ca un sistem parțial şi în plus un sistem parțial al relațiilor specifice intensiunii". [2]

În definirea implicației stricte Lewis pleacă de la ideea de *posibil* luată aici ca termen prim (nedefinit) în baza căruia introduce următoarea definiție:

$p \prec q = df \sim \Diamond (p \,\&\, \sim q)$

"P implică strict q" este identic prin definiție cu "nu este posibil p şi non q" (sau "nu este posibil ca p să fie adevărată şi q falsă). În locul implicației materiale a apărut acum un concept modal de implicație care pretinde să exprime mai fidel relația de inferență deductivă.

Observație.

Pentru a uşura scrierea vom folosi pentru modalități simbolurile literare: M (posibil), L (necesar), Q (contingent) şi U (imposibil). Pentru implicația strictă în loc de " $\prec$ " vom folosi "$\Rightarrow$".

Întrucât posibilul se poate transcrie prin necesar, conform definiției Mp = ~ L ~ p, putem reformula definiția implicației stricte în felul următor:

$p \Rightarrow q = \sim M(p \,\&\, \sim p) = \sim \sim L \sim (p \,\&\, \sim q) = L \sim (p \,\&\, \sim q) = L(p \rightarrow q)$.

Aşadar, "p implică strict q", dacă "p implică material q" este o propoziție necesar adevărată.

Cu ajutorul implicației stricte Lewis introduce alte două relații modale: a) relația de echivalență strictă (p = q) şi b) relația de consistență (p o q).

a) $(p = q) = df\,(p \Rightarrow q) \cdot (q \Rightarrow p)$.

b) $(p \circ q) = df \sim (p \Rightarrow \sim q)$.

Câteva precizări în legătură cu conceptul de consistență. Având în vedere că "p ⇒ q" înseamnă, strict vorbind, "q se deduce din p", spunem că două propoziții sunt consistente dacă din adevărul uneia nu putem deduce falsul celeilalte.

Dar pentru că

$\sim (p \Rightarrow \sim q) = \sim (q \Rightarrow \sim p)$

este o teoremă în sistemul implicației stricte, propoziția "p o q" (p este consistent cu p) înseamnă de fapt "p nu implică falsul lui q şi q nu implică falsul lui p".

Relația de consistență are proprietăți remarcabile, unele dintre ele direct legate de proprietățile implicației materiale. Redăm câteva din cele mai importante.

1) $(p \,\&\, q) \Rightarrow (p \circ q)$

2) $\sim (p \circ \sim p)$

3) $(p \circ q) = (p \circ q)$

4) $((p \Rightarrow q) \& (p \circ r)) \Rightarrow (q \circ r)$

5) $((p \Rightarrow q) \& \sim (q \circ r)) \Rightarrow \sim (p \circ r)$

6) $((p \Rightarrow r) \& (q \Rightarrow s) \& (p \circ q)) \Rightarrow (r \circ s)$

7) $((p \& q) \circ r) = ((q \& r) \circ p) = ((p \& r) \circ q)$

8) $((p \Rightarrow q) \& (p \Rightarrow \sim q)) \Rightarrow \sim (p \circ q)$

9) $((p \Rightarrow q) \& (p \circ p)) \Rightarrow (q \circ q)$

10) $((p \circ p) \& \sim (q \circ q)) \Rightarrow \sim (p \Rightarrow q)$

11) $p \Rightarrow (p \circ p)$

12) $\sim (p \circ p) \Rightarrow \sim p$.

Interesant este că posibilul poate fi definit cu ajutorul relației de consistență:

$Mp = (p \circ p) = \sim (p \Rightarrow \sim p)$

Aceasta înseamnă că:

Posibilul p = p nu poate fi dedus din propria sa negație = p este consistent cu el însuși.

Celelalte categorii modale pot fi definite în aceeaşi manieră:

$Lp = \sim M \sim p = (\sim p \Rightarrow p) = \sim (\sim p \circ \sim p)$

$Up = \sim Mp = (p \Rightarrow \sim p) = \sim (p \circ p)$

$Qp = \sim Lp = \sim (\sim p \Rightarrow p) = (\sim p \circ \sim p)$.

În baza acestor definiții am putea lua ca idee primară (nedefinită) ideea de consistență cu ajutorul căreia să introducem apoi ideile de posibilitate şi implicație strictă ca idei derivate.

Se pune în mod firesc întrebarea dacă implicația strictă aşa cum a fost definită mai sus rezolvă problemele pe care le ridică implicația materială? Voi discuta această problemă sub un singur aspect şi anume relația dintre conceptul de consistență şi conceptul de independență. Pentru moment să redefinim aceste concepte în termenii implicației materiale.

a) $\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow$ "p este independent cu q" (sau "q nu este deductibil din p").

b) $\sim (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow$ "q este consistent cu p".

Având în vedere că

(1) $\sim (p \rightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow \sim q)$

(2) $\sim (p \rightarrow \sim q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$

(3) $\sim (p \rightarrow q) \Rightarrow (q \rightarrow p)$

sunt teze logice, semnificația lor trebuie luată ca atare:

(1) =Dacă p şi q sunt independente atunci p şi q nu sunt consistente.

(2) = Dacă p este consistentă cu q atunci q este deductibilă din p.

(3) = Dacă q este independentă față de q atunci p este deductibilă din q.

Cele trei teze şi interpretările lor sunt convergente în următorul rezultat: nu există două propoziții care să fie

concomitent independente şi consistente. Acest rezultat este în deplin acord cu unul din paradoxele implicației materiale menționate la început, şi anume: pentru două propoziții adevărate p, q, sau p implică q sau q implică p.

Implicația strictă înlătură aceste neajunsuri fie şi pentru simplu motiv că nu au proprietățile (1) – (3) de mai sus. Aceasta înseamnă că expresiile:

(1)' $\sim (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$

(2)' $\sim (p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

(3)' $\sim (p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

nu mai sunt teze în sistemul implicației stricte.

Ambiguitatea termenului "posibil"

Ideea de *consistență* i-a permis lui Lewis să surprindă o importantă ambiguitate cu privire la semnificația termenului "posibil" (ca şi a celorlalte categorii modale). "Posibil p" – arată Lewis – înseamnă ceea ce este "logic conceptibil" sau "absența autocontradicției" (ceea ce nu implică propria sa contradicție). Al doilea înțeles însă, şi cel mai frecvent, este cel de "consistent cu ceea ce este dat" sau "consistent cu ceea ce este cunoscut ca adevărat". *Imposibil* va însemna atunci "inconsistent cu ceea ce este dat sau cu ceea ce este cunoscut". În sfârşit, *necesar* înseamnă "implicat de ceea ce este dat sau de ceea ce este cunoscut". (*Symbolic Logic,* pag. 37).

Aşadar, atât *posibilul* cât şi *imposibilul* şi *necesarul* au un sens relativ şi un sens absolut. În sens relativ ele presupun consistența respectiv inconsistența cu ceva cunoscut (simbolizăm cu Q această cunoaştere care înseamnă o propoziție sau o mențiune de propoziții). În sens absolut aceste concepte vizează consistența/inconsistența propoziției cu ea însăşi. Rezum această situație în următorul tabel:

Relativ	P este	Absolut
$(p \circ Q)$	posibil	$(p \circ p)$
$\sim (p \circ Q)$	imposibil	$\sim (p \circ p)$
$\sim (\sim p \circ Q)$	necesar	$\sim (\sim p \circ \sim p)$
$Q \Rightarrow p$		$(\sim p \Rightarrow p)$
(1)		(2)

Între cele două sensuri ale categoriilor modale de posibil imposibil şi necesar există următoarele implicații:

Posibil (1) implică Posibil (2)

Imposibil (2) implică Imposibil (1)

Necesar (2) implică Necesar (1)

De regulă, cele două sensuri se confundă, în vorbirea curentă mai ales. În considerațiile ce vor urma este bine de ştiut că avem de-a face doar cu modalitățile luate în sens absolut.

Notă. Distincția relativ-absolut poate fi luată ca o altă proprietate specifică modalităților aletice alături de distincția *de dicto – de re.*

3. SISTEMELE IMPLICAȚIEI STRICTE. SISTEMUL T.

Dintre sistemele implicației stricte voi prezenta doar sistemul T. alte sisteme cum ar fi sistemul M (von Wright), sistemul B (Brouwer) şi sistemele S1-S4 (Lewis) vor fi doar succint caracterizate. Opțiunea pentru sistemul T este motivată de trei categorii de factori: i) este didactic cel mai elaborat şi permite evidențierea aspectelor esențiale ale oricărei axiomatizări; ii) permite trecerea spre alte sisteme cu care se află în diferite raporturi logice; iii) conține ca pe o parte strictă a sa un sistem cunoscut al calculului propozițional bivalent, respectiv sistemul axiomatic Hilbert – Ackermann. Sistemul a fost construit de R. Feys în 1937 printr-o modificare a sistemului intuiționist construit de Gödel (1933). În varianta lui Feys, se numea "sistemul t"; în 1953 Sobocinski l-a reorganizat, noua variantă numindu-se de atunci "sistemul T".

1) Sintaxa sistemului

În sintaxa sistemului sunt cuprinse următoarele categorii de semne:

p, q, r, ... variabile propoziționale,

$\sim, \cdot, \vee, \rightarrow, \equiv$ operatorii propoziționali cunoscuți (*non, și, etc.)*

M, L, $\Rightarrow$, = simboluri pentru conceptele modale (*posibil. necesar, implicația și echivalența strictă.*

(,) ; [,], etc. semne auxiliare.

2) Reguli de formare

Conceptul de "expresie în T" se definește recursiv în baza următoarelor reguli:

R1. p, q, r, ... sunt expresii.

R2. Dacă α este expresie, $\sim$, α, Mα, Lα, sunt expresii.

R3 Dacă α și β sunt expresii atunci $\alpha \cdot \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha = \beta$, sunt de asemenea expresie.

3) Axiome

A1. $(P \vee P) \rightarrow P$

A2. $P \rightarrow (P \vee Q)$

A3. $(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$

A4. $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$

A5. $Lp \rightarrow p$

A6. $L(p \rightarrow q) \rightarrow (Lp \rightarrow Lq)$.

4) Definiții

D1. $Mp = \sim L \sim P$

D2. $(p \Rightarrow Q) = L\ (P \rightarrow Q) = \sim M(p \cdot \sim q)$

D3. $(P = Q) = (P \Rightarrow Q) \cdot (Q \Rightarrow P)$.

5) Reguli de deducție

R1 Regula detașării

$$\frac{\vdash \alpha, \vdash \alpha \to \beta}{\vdash \beta}$$

R2. Regula substituției

$$\frac{\vdash \alpha \ [P]}{\vdash (P/Q)\ \alpha}$$

R3. Regula necesității

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash L\ \alpha}$$

Observații

1. Axiomele, definițiile şi regulile de deducție formează la un loc postulatele sistemului. Ele sunt expresii care se postulează nu se demonstrează.

2. Axiomele A1-A4, împreună cu regulile R1-R2 formează un sistem complet de calcul propozițional (vezi sistemul Hilbert – Ackermann studiat la cursul de *Logică simbolică*).

3. În locul sistemului de calcul propozițional se poate lua orice alt sistem complet la care se adaugă axiomele modale A5-A6 plus regula de deducție aferentă.

6) Teoreme

În legătură cu demonstrațiile ce vor urma se impun câteva precizări: i) orice teză şi orice regulă derivată a calculului propozițional bivalent folosită va fi desemnată cu "CP" (din motive de spațiu), ii) operația de substituție se marchează cu "/" cu indicarea expresiei în care se face substituția, iii) aplicarea unei reguli sau definiții se marchează cu semnul "x", iv) cu "RD" se notează "regula derivată la care se adaugă numărul de ordine.

RD1.

$$\frac{\vdash \alpha \vdash \beta}{\vdash (L\,\alpha \rightarrow L\,\beta)}$$

Supoziție	(1) $\alpha \rightarrow \beta$
(1) x R3	(2) $L\,(\alpha \rightarrow \beta)$
(2) x A6 x R1	(3) $L\,\alpha \rightarrow L\,\beta$
(1) (3)	RD1

T1. $P \rightarrow Mp$

A5, p / ~ p	(1) $L \sim p \rightarrow \sim p$
(1) x CP	(2) $\sim \sim p \rightarrow \sim L \sim p$
(2) x CP x D1	T1

T2. $(p = q) \rightarrow (Lp \equiv Lq)$

A6 x D2	(1) $(p \Rightarrow q) \rightarrow (Lp \rightarrow Lq)$
(1), p/q, q/p	(2) $(q \Rightarrow p) \rightarrow (Lq \rightarrow Lp)$

(1), (2) x CP $((p \Rightarrow q)\,(q \Rightarrow p) \rightarrow ((Lp \rightarrow Lq)\,(Lq \rightarrow Lp))$

(3) x D3 x CP T2.

T3. $L\,(p \cdot q) \equiv (Lp \cdot Lq)$.

CP (1) $(P \cdot Q) \rightarrow P$

(1) x R3 (2) $L((P \cdot Q) \rightarrow P)$

(2) x A6 (3) $L((P \cdot Q) \rightarrow P) \rightarrow (L\,(P \cdot Q) \rightarrow LP)$

(2), (3) x R1 (4) $L(P \cdot Q) \rightarrow LP$

(4) P/Q, Q/P (5) $L(P \cdot Q) \rightarrow LQ$

(4), (5) x CP (6) $L(P \cdot Q) \rightarrow (LP \cdot LQ)$

CP (7) $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \cdot Q))$

(7) x R3 x R1 (8) $LP \rightarrow (LQ \rightarrow L(P \cdot Q))$

(8) P/Q, Q/P (9) $LQ \rightarrow (LP \rightarrow L(P \cdot Q))$

(8), (9) x CP (10) $(LP \cdot LQ) \rightarrow L(P \cdot Q)$

(6), (10) x CP T3.

T4. $L\,(P \equiv Q) \equiv (P = Q)$

T3, $P/P \rightarrow Q$, $Q/Q \rightarrow P$ (1)

$L((P \rightarrow Q) \cdot (Q \rightarrow P)) \equiv (L(P \rightarrow Q) \cdot L(Q \rightarrow P))$

(1) x CP x D2 (2) $L\,(P \equiv Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \cdot (Q \Rightarrow P)$

(2)x D3 T4.

R D2.

$$\frac{\vdash (\alpha \equiv \beta)}{\vdash (L\alpha \equiv L\beta)}$$

Sup.	(1) $\alpha \equiv \beta$
(1) x R3	(2) L ($\alpha \equiv \beta$)
(2) x T4	(3) $\alpha = \beta$
(3) x T2	(4) L $\alpha \equiv \alpha\ \beta$
(1), (4)	RD2.

T5. L P ≡ ~ M ~ P

CP	(1) P ≡ ~ ~ P
(1), P/LP	(2) Lp ≡ ~ ~ Lp
(2), (1)	(3) Lp ≡ ~ ~ L ~ ~ p
(3) x D1	T5.

T6. ~ M (P ∨ Q) ≡ (~ M P · ~ M Q)

T3, P/ ~ P. Q/ ~ Q	(1) L (~ P · ~ Q) ≡ (L ~ p · L ~ Q)
(1) x D1	(2) ~ M ~ (~ p · ~ Q) ≡ (L ~ p · L ~ Q)
(2) x CP x D1	T6

T7. M (P ∨ Q) ≡ (M P ∨ M Q)

CP	(1) (~ P ≡ Q) → (P ≡ ~ Q)
(1), P/M (P ∨Q), Q/~ MP · ~ M Q, T6 x R1	
	(2) M(P ∨ Q) ≡ ~ (~ M p · ~ M Q)
(2) x CP	T7.

T8. $(P \Rightarrow Q) \dashrightarrow (Mp \rightarrow MQ)$

A6, P/ ~ Q, Q/~ P)	(1) $L(\sim Q \rightarrow \sim P) \rightarrow (L \sim Q \rightarrow L \sim P)$
(1) x CP	(2) $L(P \rightarrow Q) \dashrightarrow (\sim L \sim P \rightarrow \sim L \sim Q)$
(2) x D2 x D1	T8.

T9. $(L\ P \vee L\ Q) \rightarrow L\ (P \vee Q)$

CP	(1) $P \rightarrow (P \vee Q)$
(1) x RD1	(2) $LP \rightarrow L\ (P \vee Q)$
(2), (3) x CP	T9.

T10. $M(P \cdot Q) \rightarrow (MP \cdot MQ)$

T9, P/ ~ P, Q/ ~ Q	(1) $(L \sim P \vee L \sim Q) \rightarrow L\ (\sim P \vee \sim Q)$
(1) x CP	(2) $\sim L(\sim \vee \sim Q) \rightarrow \sim (L \sim P \vee L \sim Q)$
(2) x D1	(3) $M\sim (\sim P \vee \sim Q) \rightarrow \sim (\sim Mp \vee \sim MQ)$
(3) x CP	T 10.

T11. $(\sim P \Rightarrow P) \equiv Lp$

CP	(1) $(\sim P \rightarrow P) \equiv P$
(1) x RD2	(2) $L\ (\sim P \rightarrow P) \equiv Lp$
(2) x D2	(3) $(\sim P \Rightarrow P) \equiv Lp$

T12. $(P \Rightarrow \sim P) \equiv L \sim P$

CP	(1) $(P \rightarrow \sim P) \equiv \sim P$

(1) x RD2 (2) $L(P \rightarrow \sim P) \equiv L \sim P$

(2) x D2 T12.

T13. $((Q \rightarrow P) \cdot (\sim Q \Rightarrow P)) \equiv LP$

CP (1) $((Q \rightarrow P) \cdot (\sim Q \rightarrow P)) \equiv P$

(1) x RD2 (2) $L((Q \rightarrow P) \cdot (\sim Q \rightarrow P)) \equiv LP$

(2) x T3 (3) $(L(Q \rightarrow P) \cdot L(\sim Q \rightarrow P)) \equiv LP$

(3) x D2 T13.

T14. $((P \Rightarrow Q) \cdot (P \Rightarrow \sim Q)) \equiv L \sim P$

CP (1) $((P \rightarrow Q)(Q \rightarrow \sim Q)) \equiv \sim P$

(1) x RD2 (2) $L((P \rightarrow Q) \cdot (P \rightarrow \sim Q)) \equiv L \sim P$

(2) x T3 (3) $L(P \rightarrow Q) \cdot (L(P \rightarrow \sim Q)) \equiv L \sim P$

(3) x D2 T14.

T15. $Lp \rightarrow (Q \Rightarrow P)$

CP (1) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

(1) x RD1 (2) $Lp \rightarrow L(Q \rightarrow P)$

(2) x D2 T15.

T16. $L \sim p \rightarrow (P \Rightarrow Q)$

CP (1) $\sim P \rightarrow (P \rightarrow Q)$

(1) x RD2 (2) $L \sim p \rightarrow L(P \rightarrow Q)$

(2) x D2	T16.

T17. $LP \rightarrow MP$

CP	(1) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$
(1), P/LP, Q/P, R/MP	(2) $(Lp \rightarrow P) \rightarrow ((P \rightarrow MP) \rightarrow (LP \rightarrow MP))$
(2) x A5 x R1	(3) $(P \rightarrow Mp) \rightarrow (LP \rightarrow MP)$
(3), T1 x R1	T 17.

RD3.

$$\frac{\vdash L\ \alpha}{\vdash M\ \alpha}$$

Sup.	(1) $L\ \alpha$
T17, P/α	(2) $L\ \alpha \rightarrow M\ \alpha$
(1) (2) x R1	(3) $M\ \alpha \rightarrow M\ \alpha$
(1) (2) x R1	(3) $M\ \alpha$
(1) (3)	RD3

T18. $Lp \rightarrow (M\ Q \Rightarrow M\ (P \cdot Q))$.

CP	(1) $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \cdot Q))$
(1) x RD1	(2) $L\ P \rightarrow L\ (Q \rightarrow (P \cdot Q))$
(2) x RD1	(3) $L\ P \rightarrow (L\ Q \rightarrow L\ (P \cdot Q))$
(2) x D2	T18.

7) Consistența sistemului T

Sistemul T este consistent sau necontradictoriu. Aceasta înseamnă că dacă $\alpha \in T$ (α este teoremă în T) atunci $\sim \alpha \notin T$ ($\sim \alpha$ nu este teoremă în T). Dacă $\sim \alpha$ ar fi teoremă atunci s-ar demonstra în sistem o contradicție, $\alpha \cdot \sim \alpha$. Putem reveni acum la ideea de consistență definită în paragraful anterior:

$$(T \circ \alpha) = \sim (T \Rightarrow \sim \alpha)$$

Vorbim astfel de consistența sistemului ca atare şi de consistența expresiei α în raport cu sistemul.

Demonstrația de consistență se face cu ajutorul operației de *transformare* sau CP – *transformare*. Cum se ajunge de la o expresie modală la transformata ei? Se înlătură modalitatea iar partea rămasă se exprimă numai în simbolurile de bază ale sistemului. Eliminarea modalității este legitimată de următoarea regulă, care poate servi, la nevoie, ca o regulă derivată:

(RD) $\dfrac{\vdash L\,\alpha}{\vdash \alpha}$

Sup.	(1) $\vdash L\,\alpha$
(1) A5	(2) $\vdash L\,\alpha \rightarrow \alpha$
(2) (1) x R1	(3) α
(1) (3)	RD.

Pentru a obține CP – transformata formulei $L\alpha$ se exprimă α numai prin $\sim$, $\vee$ (semnele de bază ale sistemului).

Se poate demonstra mai departe că:

a) CP – transformata oricărei expresii din T este o expresie CP.

b) Orice expesie în T va avea o singură CP – transformare (deşi mai multe expresii din T vor avea aceeaşi CP- transformare)

c) Dacă CP – transformata lui $\alpha \in T$ este α', CP – transformata lui $\sim \alpha$ va fi $\sim \alpha'$.

d) CP - transformata oricărei teze în T este o teză în CP. În baza propoziţiilor a) – c) se demonstrează că:

e) Axiomele A1 – A4 sunt propriile lor transformări.

f) Axiomele modale A5 şi A6 au ca transformări formulele $\sim P \vee P$ şi $\sim (\sim P \vee Q) \vee (\sim P \vee Q)$.

g) Dacă α şi $(\alpha \rightarrow \beta)$ sunt teze, atunci şi α' şi $(\alpha \rightarrow \beta)'$ sunt teze. Dar $(\alpha \rightarrow \beta) = (\alpha' \rightarrow \beta')$ şi, deci, dacă α' este teză, β' va fi şi ea teză.

h) Dacă $(P/Q)\alpha = \beta$ atunci $\alpha' = \beta'$. Prin urmare, dacă β' este teză α' va fi şi ea teză. Conform cu R3, α va fi teză.

i) Dacă $L\alpha$ este teză α este teză.

Propoziţiile e) – i) demonstrează consistenţa sistemului având în vedere că atât axiomele cât şi regulile de deducţie conservă propietatea de teză a sistemului sau de expresie identic adevărată

8) Completitudinea sistemului T.

Completitudinea unui sistem axiomatic se defineşte în sens larg şi în sens restrâns. În sens larg un sistem este complet dacă orice formulă validă este derivabilă în sistem. În sens restrâns un sistem este complet dacă adăugarea unei formule nederivabile face sistemul inconsistent.

Sistemul T este complet în sens larg nu şi în sens restrâns. Dacă se adaugă formula $p \rightarrow Lp$ sistemul nu devine inconsistent deşi formula nu este derivabilă în sistem. Se poate demonstra cu uşurinţă că $p \rightarrow Lp$ şi $Lp \rightarrow p$ au aceeaşi CP – transformare.

9) Independenţa sistemului

Axiomele A1 – A4sunt independente (vezi cursul de logică simbolică). Axioma A5 este independentă de A6 (şi invers) în următoarea interpretare: $Lp = \nu$ (unde "ν" înseamnă "adevărat"). Pentru aceeaşi interpretare A5 = p şi A6 = ν ceea ce înseamnă că cele două axiome sunt independente.

4. BAZELE ALTERNATIVE ALE SISTEMULUI T

Prin "bază" a unui sistem deductiv înţelegem postulatele sistemului (axiome, definiţii, reguli de deducţie). Notăm cu A şi B bazele a două sisteme oarecare şi cu T(A) respectiv T(B)

teoremele deduse din aceste baze. Relativ la A şi B discutăm următoarele situații: i) $A = B$, şi ii) $A \neq B$.

Dacă $A = B$ atunci şi $T(A) = T(B)$. Dacă $A \neq B$ putem avea una din următoarele situații: a) $A \subset B$, b) $B \subset A$, c) $A \cap B \neq \emptyset$. Dacă $A \subset B$ atunci şi $T(A) \subset T(B)$ iar dacă $A \cap B \neq 0$ atunci $T(A) \cap T(B) \neq \emptyset$.

Definiție. Două sisteme A, B se numesc deductiv echivalente dacă $T(A) = T(B)$.

Notăm relația de echivalență cu $\models\!\!\models$ şi reformulăm definiția în felul următor: $A \models\!\!\models B. \rightleftarrows . T(A) = T(B)$.

Construim acum un sistem T' echivalent deductiv cu T. Axiomele modale ale sistemului T' vor fi:

AT'5. $Lp \rightarrow P$

AT'6. $L(P \cdot Q) \equiv (LP \cdot LQ)$.

AT'7. $L(P \rightarrow P)$

Reguli

RT'1. Regula detaşării

RT'2. Regula substituției

RT'3. $$\frac{\vdash (\alpha \equiv \beta)}{\vdash (L\alpha \equiv L\beta)}$$

Pentru a demonstra relația $T \models\!\!\models T'$ trebuie să demonstrăm a) $T \vdash T'$ şi b) $T' \vdash T$. Se înțelege că de fiecare dată este suficient să demonstrăm elementele necomune din respectiva bază.

a) $T \vdash T'$

Demonstrația este foarte simplă pentru că:

1) Axioma $Lp \rightarrow p$ este comună.

2) Axioma AT'6 este teorema T3.

3) Axioma AT'7 se demonstrează simplu din $p \rightarrow p$ și R3.

4) Regulile RT'1 și RT'2 sunt comune.

5) Regula RT'3 este regula RD2.

b) $T' \vdash T$.

Pentru a demonstra că T se deduce din T' este suficient să demonstrăm axioma A6 și regula R3:

A6. $L(p \rightarrow Q) \rightarrow (Lp \rightarrow LQ)$

AT'6, $Q/P \rightarrow Q$	(1) $(Lp \cdot L(P \rightarrow Q)) \equiv L(P \cdot (P \rightarrow Q))$
CP:	(2) $(P \cdot (P \rightarrow Q)) \equiv (P \cdot Q)$.
(2) x RT'3	(3) $L(P \cdot (P \rightarrow Q)) \equiv L(P \cdot Q)$
(3) x AT'6	(4) $(LP \cdot L(P \rightarrow Q)) \equiv (LP \cdot LQ)$
CP	(5) $((P \cdot Q) \rightarrow R) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$
(4) x CP	(6) $(LP \cdot L(P \rightarrow Q)) \rightarrow (LP \rightarrow LQ)$
(5) P/LP, $Q/L(P \rightarrow Q)$	(7) $L(P \rightarrow Q) \rightarrow (LP \rightarrow (LP \rightarrow LQ))$
$R/(LP \cdot LQ)$ xR1	
(7) x CP	(8) $L(P \rightarrow Q) \rightarrow (LP \cdot LP \rightarrow LQ))$
(8) x CP	A6.

Demonstrăm că şi R3 se deduce din T'

R3. $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash L\,\alpha}$

Supoziție	(1) α
CP:	(2) $\alpha \rightarrow ((P \rightarrow P) \equiv \alpha)$
(1) (2) x RT'1	(3) $(P \rightarrow P) \equiv \alpha$
(3) x RT'3	(4) $L(P \rightarrow P) \equiv L\alpha$
(4) x AT'7	(5) $L\alpha$
(1) (5)	R3.

Cu aceasta am demonstrat că şi T'$\vdash$ T ceea ce înseamnă că T şi T' sunt deductiv echivalente (T $\models\!\!\models$ T').

Există şi sisteme în bază M echivalente deductiv cu T unul din acestea fiind sistemul M al lui Von Wright (1951).

Baza sistemului:

M1 = un sistem complet de calcul propozițional bivalent.

M2. $p \rightarrow Mp$

M3. $M (P \vee Q) \equiv (MP \vee MQ)$.

Reguli

MR1. Regula detaşării

MR2. Regula substituției

MR3. Regula necesității

MR4. $\dfrac{\vdash (\alpha \equiv \beta)}{\vdash (M\alpha \equiv M\beta)}$

(Se demonstrează în aceeaşi manieră că M este deductiv echivalent cu T şi cu T').

5. SISTEMELE S1 – S5, B

Pentru a avea o imagine mai completă asupra ideii de implicație strictă voi face o scurtă trecere în revistă a sistemelor S1-S5 şi B şi a problemelor mai importante pe care le ridică ele. În cartea sa din 1918, *Survey of Symbolic Logic,* Lewis a plecat de la opt axiome, şi anume:

1. $(p \cdot q) \equiv (q \cdot p)$
2. $(p \cdot q) \Rightarrow p$
3. $p \Rightarrow (p \cdot p)$
4. $p \cdot (q \cdot r) \Rightarrow q \cdot (p \cdot r)$
5. $p \Rightarrow \sim (\sim p$
6. $((p \Rightarrow q) \cdot (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
7. $\sim Mp \Rightarrow \sim p$
8. $(p \Rightarrow q) = (\sim Mq \Rightarrow \sim Mp)$

Relativ la sistemul lui Lewis din *Survey*, E.L. Post a demonstrat teza $\sim Mp = \sim p$, adică imposibilul este identic cu falsul, ceea ce face să dispară orice deosebire dintre implicația strictă şi implicația materială astfel că sistemul implicației stricte se reduce la sistemul din *Principia Mathematica.* În *Symbolic Logic,* Lewis elimină axioma 8, iar sistemul nou obținut este numit S1. Dacă, în schimb, la axiomele 1 –7 se adaugă axioma

9. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim Mq \Rightarrow M \sim p)$

Se obține sistemul S3. Evident, pentru toate aceste sisteme se pot da baze alternative care de regulă conțin mai puține axiome urmărindu-se sistemele cu cel mai mic număr de axiome.

Iată câteva alternative mai importante ale sistemelor menționate:

Sistemul S1.

1. $(p \cdot q) \Rightarrow (q \cdot p)$
2. $(p \cdot q) \Rightarrow p$
3. $(p \Rightarrow (p \cdot p)$
4. $((p \cdot (q \cdot r)) \Rightarrow (p \cdot (q \cdot r))$
5. $((p \Rightarrow q) \cdot (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
6. $(p \cdot (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

Regulile de deducție sunt regula substituției expresiilor echivalente, adjuncția şi regula detaşării. Axioma $p \Rightarrow \sim (\sim p)$ s-a dovedit a nu fi independentă (Mc Kinsey).

Sistemul S2.

Acest sistem se obține adăugând la S1 axioma

7. $M(p \cdot q) \Rightarrow Mp$

numită de Lewis *postulatul consistenței.* Acest postulat asertează faptul că numai o propoziție posibilă (sau consistentă) poate fi termenul unei conjuncții consistente.

Sistemul S3

Dacă la S1 sa S2 se adaugă axioma

8. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (Lp \Rightarrow Lq)$

Se obține sistemul S3. Totuşi, Lewis obține acest sistem adăugând la S1 teza $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim Mq \Rightarrow \sim Mp)$.

Sistemul S4

Acest sistem se poate obține din T sau din S1. Lewis îl obține adăugând la S1 axioma

9. $Lp \Rightarrow LLp$.

Acelaşi sistem îl obținem din T şi axioma $Lp \rightarrow LLp$. S4 îl conține pe S3 şi implicit pe S2.

Sistemul S5

Lewis obține sistemul S5 din S1 la care adăugăm axioma

10. $Mp \Rightarrow LMp$

Sistemul S5 îl conține pe S4

Sistemul B.

Dacă la sistemul S4 adăugăm axioma

11. $p \rightarrow LMp$

obținem sistemul S5. Dacă, însă, aceeaşi axiomă sau axioma

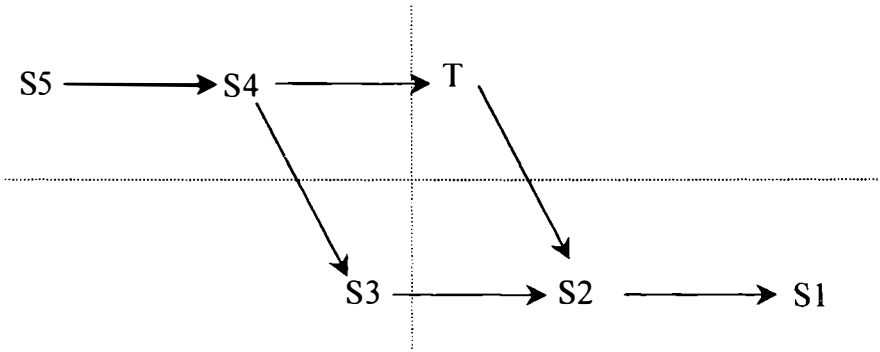
12. $MLp \rightarrow p$

se adaugă sistemului T, sistemul obținut diferă de S5 şi de toate celelalte sisteme construite până acum. Axioma 11 se numeşte *brouweriană* iar sistemul obținut – *sistemul lui Brouwer* (notat B). De unde provine această axiomă şi ce legătură are ea cu fondatorul intuiționismului matematic? Axioma a fost introdusă în 1930 de către O. Becker şi este interpretarea modală a negației intuiționiste. După cum se cunoaşte, în logica intuiționistă "~ p" înseamnă "nu este posibil p" sau "imposibil p" sau "necesar non-p". Din această cauză, în logica intuiționistă este valabilă teza p $\rightarrow$ ~ ~ p nu şi ~ ~ p $\rightarrow$ p. Dacă înlocuim în prima expresie pe "~" cu "L ~" obținem p $\rightarrow$ L ~ L ~ p, respectiv p $\rightarrow$ LMp, adică axioma 11. În felul acesta logica intuiționistă este direct legată de logica modală, ea generează un sistem modal propriu.

6. CÂTEVA OBSERVAȚII PE MARGINEA SISTEMELOR IMPLICAȚIEI STRICTE

Sistemele descrise până acum nu sunt singurele sisteme ale implicației stricte. După apariția, în 1932, a cărții lui Lewis şi Langford *Symbolic Logic* s-au construit încă multe altele încât astăzi putem vorbi despre o adevărată "familie" de astfel de sisteme. Relațiile dintre ele, modul în care ele se conțin sau se intersectează au constituit principalele teme de discuție la

începutul anilor şaizeci şi mult timp după aceea. Relaţiile dintre sistemele discutate în acest curs pot fi redate prin schema:



Relaţia "A → B" înseamnă că orice teoremă în B este, de asemenea, o teoremă în A (nu şi invers). Sistemele de deasupra liniei orizontale se bazează toate pe regula necesităţii. Cele din stânga liniei verticale conţin un număr finit de modalităţi distincte, iar cele din dreapta liniei conţin un număr infinit de modalităţi.

Ce înseamnă că un sistem modal conţine un număr finit sau infinit de modalităţi distincte? Într-un sistem cum este S4, să zicem, se pot demonstra teoreme de tipul:

(1) $Lp \equiv LLp$

(2) $Mp \equiv MMp$

care fac ca în acest sistem să nu existe modalităţi iterate. Spre deosebire de sistemul T unde aceste teoreme nu se deduc şi unde există, de aceea, un număr infinit de modalităţi, în S4 singurele

modalități admise sunt L, M, LM, ML, LML, MLM şi, desigur, negațiile lor. În sistemul S5 se demonstrează tezele

(3) $Mp \equiv LMp$

(4) $Lp \equiv MLp$

care reduc şi mai drastic mulțimea modalităților independente. Practic, în S5 nu există decât cele patru modalități aletice de bază: L (necesar), M (posibil), ~ L (contingent) şi ~ M (imposibil).

Întrebarea care se pune este dacă implicația strictă definită în acest capitol şi descrisă prin sistemele modale menționate elimină cu adevărat paradoxele implicației materiale sau dacă nu cumva ea le reeditează într-o altă formă şi într-un alt plan? Legat de această întrebare voi reproduce următorul pasaj din capitolul *Implicație şi deductibilitate* din cartea lui Lewis şi Langford *Symbolic Logic,* capitol care a fost tradus şi în limba română: "Singura îndoială serioasă care poate să apară privitor la echivalența dintre $P \Rightarrow Q$ şi relația de deductibilitate, precum şi privitor la adecvarea implicației stricte la problemele deducției în general, reiese din faptul că implicația strictă prezintă şi ea paradoxele corespunzătoare:

19. 74. $\sim Lp \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

"Dacă p este imposibilă, atunci p implică strict orice propoziție q", şi

19. 75. $\sim M \sim p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

"Dacă p este necesară, atunci orice propoziție q implică strict p". Dacă p $\Rightarrow$ q este echivalentă cu "q este deductibilă din p", atunci pentru a satisface aceste teoreme trebuie să avem situația că din orice propoziție care neagă un adevăr necesar sau tautologic se poate deduce orice şi că orice propoziție al cărei adevăr este necesar sau tautologic poate fi dedusă din orice". [9]

Prin urmare, ceea ce am numit la început "paradoxele implicației materiale" sunt proprietăți care se regăsesc şi în cazul implicației stricte. Problema este destul de complicată însă aici mă voi rezuma la a spune că respectivele proprietăți pe care noi le apreciem ca paradoxale nu sunt, strict vorbind, proprietățile implicației ci ale deducției valide. Dacă din premise false deducem în mod valid o propoziție falsă sau una adevărată este firesc ca falsul să implice orice (şi adevărul şi falsul). În măsura în care o implicație "traduce" în mod corect relația inferențială deductivă, obligatoriu proprietățile esențiale ale acestei inferențe se vor regăsi printre proprietățile esențiale ale implicației. Discuția de la începutul capitolului despre adevăr şi validitate, pe de o parte, implicație şi deductibilitate, pe de alta, cred că oferă o explicație suficient de clară a acestor proprietăți.

A nu se înțelege de aici că sistemele implicației stricte nu fac decât să repete sistemele implicației materiale şi că între cele două maniere de abordare nu ar exista nici o deosebire. Sistemele implicației stricte au scos în evidență sensuri noi ale ideilor de

adevăr şi posibilitate, au dat o nouă înţelegere ideii de consistenţă şi, bineînţeles, au dus la o mult mai profundă înţelegere a relaţiei de deductibilitate. Fără îndoială că lucrurile nu s-au oprit aici. În capitolul următor vom avea ocazia să vedem şi alt gen de cercetări logice care au ca punct de plecare sistemele implicaţiei stricte. Nu mai puţin importante sunt consecinţele filosofice ale acestui tip de logică modală. Pentru că în finalul cursului voi puncta pe scurt principalele probleme filosofice aferente logicii modale nu este cazul să intru acum în detalii. Aş vrea să subliniez, totuşi, un singur aspect.

Conform celor spuse în *Introducere* şi în primul capitol ideile de necesar, posibil etc. nu se pot defini în logica bivalentă, ele presupun diferite tipuri de polivalenţă. Întrebarea care se pune este ce fel de polivalenţă este proprie sistemelor implicaţiei stricte? Fără a intra în detalii vreau să spun, totuşi, că aceste sisteme sunt infinit valente şi că în trecerea de la polivalenţă la modalitate, şi invers, s-au regăsit principalele sisteme de logică intuiţionistă. Acest rezultat logic are o relevanţă filosofică deosebită pentru că asociază sisteme logice ce provin din două direcţii diferite – filosofia pe de o parte, matematica pe de alta.

7. APLICAȚII

1. Explicați conceptele de *adevăr*, *validitate*, *implicație* și *deductibilitate*. Arătați care cu care se asociază și de ce.

2. Care sunt principalele sensuri ale relației "Dacă ... atunci..." Ce importanță prezintă faptul că această relație este o relație de ordine?

3. Comentați următoarea afirmație a lui B. Russell: "Proprietatea esențială a implicației este aceasta: ceea ce este implicat de o propoziție adevărată este adevărat".

4. Comentați raportul dintre implicație și deductibilitate din perspectiva teoremei fundamentale a deducției.

5. Care sunt paradoxele implicației materiale și cum se explică ele?

6. Ce este implicația strictă?

7. Caracterizați din perspectiva conceptului de implicație strictă conceptele de *necesar*, *posibil*, *contingent* și *imposibil*.

8. Definiți conceptele de *consistență* și *echivalență strictă*.

9. Care sunt proprietățile formale mai importante ale relației de consistență?

10. Analizați ambiguitatea termenului *posibil*.

11. Care sunt principalele sisteme ale implicației stricte și ce relații există între ele. Arătați cum se obțin unul din altul prin adăugarea respectiv eliminarea unor axiome.

12. Descrieți cu toate detaliile sistemul modal T.

NOTE

[1] Hurley, P., *A Concise Introduction to Logic*, Wadsworth Publishing Company, Belmont, California, 1994, p. 36.

[2] Whitehead, A.N. şi Russel, B., *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, 1964, p. 94.

[3] Knele, W., şi Kneale, M., *Dezvoltarea logicii,* vol. 1, Editura Dacia, Cluj Napoca, 1974, p. 144.

[4] Lewis, C.I., *Survey of Symbolic Logic*, University of California Press, Berkeley, 1918, p. 18.

[5] Von Wright, G.H., *An Essay in Modal Logic,* Noth Holland Publ. Company, Amsterdam, 1951.

[6] Feys, R., *Modal Logic,* Louvain-Paris, 1965.

[7] Hugues, G.E. şi Cresswel, M. J., *Introduction to Modal Logic,* Methuen & Co. Ltd. London, 1972.

[8] Lewis, C.I., şi Langford, C.H., *Symbolic Logic,* Symbolic Logic, Dover Publications, New York, 1932; 1959.

[9] Lewis, C.I., *Implicaţie şi deductibilitate*, în vol. *Logică şi Filosofie,* Editura Politică, Bucureşti, 1966, pag. 252-282.

[10] Dumitriu, A., *Logica Polivalentă,* Editura Enciclopedică Română, Bucureşti, 1971.

IV. INTERPRETARE ŞI MODEL
(Direcţia semantică în dezvoltarea logicii modale)

1. PROBLEMA VALIDITĂŢII PENTRU LOGICA MODALĂ

În capitolul precedent am discutat sistemul modal T şi am arătat că acest sistem este consistent şi complet. De fapt, problema este mult mai complicată pentru că atât consistenţa cât şi completitudinea au mai multe sensuri şi trebuie arătat care din aceste sensuri se potrivesc sistemului axiomatic considerat şi care nu. Să începem cu consistenţa. Iată principalele accepţiuni în care poate fi luat acest concept:

1) Un sistem axiomatic este consistent dacă pentru orice formulă A nu se poate demonstra în sistem atât A cât şi $\sim A$ (consistenţa simplă sau consistenţa în sens sintactic).

2) Un sistem axiomatic este consistent dacă orice formulă demonstrabilă în sistem este validă (consistenţa cu privire la validitate sau semantică).

Definiţia 2) s-ar putea reformula în felul următor:

3) Un sistem este consistent dacă există cel puțin o interpretare pentru care expresiile sistemului devin propoziții adevărate.

Cel puțin pentru logica propozițiilor s-au mai adăugat încă două sensuri ale termenului consistență:

4) Un sistem axiomatic este consistent dacă nu orice formulă ce poate fi construită în sistem este teoremă sau teză a sistemului. (Consistența în sensul lui Hilbert).

5) Un sistem axiomatic este consistent dacă nici o formulă constând dintr-o singură variabilă propozițională nu este teoremă a sistemului (consistența în sensul lui Post).

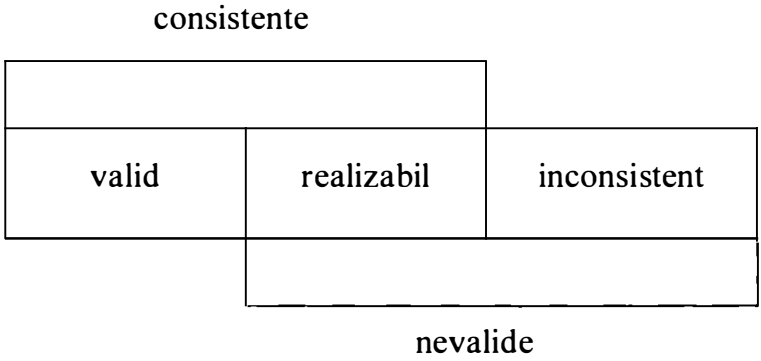
În definițiile consistenței pe care le-am enumerat, intervin conceptele de *formulă*, *formulă derivabilă* sau *teză logică*, *formulă validă* ş.a. La acestea s-ar mai putea adăuga conceptele de *lege logică*, *tautologie*, *expresie realizabilă*, *contradicție* sau expresie *identic falsă*. Pentru logica propozițiilor aceste concepte se definesc în felul următor:

1) O expresie (formulă) propozițională care în valoarea *v* (=adevărat) pentru orice valori posibile ale variabilelor propoziționale care apar în ea se numeşte *lege logică, tautologie*, expresie *logic validă* sau *identic adevărată*.

2) O expresie propozițională care ia valoarea *v* pentru unele valori ale variabilelor propoziționale care apar în ea şi *f* (= falsul) pentru altele, se numeşte *expresie realizabilă* sau *contingentă*.

3) O expresie care ia valoarea *f* pentru orice valori posibile ale variabilelor sale se numeşte *contradicție* sau expresie *identic falsă* sau *inconsistentă*.

La un loc expresiile valide şi cele realizabile formează clasa expresiilor *consistente*, iar cele inconsistente şi realizabile formează clasa expresiilor *nevalide*. Kleene sistematizează această clasificare a expresiilor propoziționale cu ajutorul următoarei figuri:



Cu aceste precizări să revenim la proprietățile sistemului axiomatic. Observăm mai întâi că termenul "consistent" apare în două accepțiuni:

1) Cu privire la sistemul axiomatic unde se poate defini în mai multe feluri, aşa cum am văzut, şi 2) cu privire la expresie, mai exact spus, la expresiile care devin adevărate pentru unele valori ale variabilelor lor. Cele două sensuri ale termenului "consistență" nu sunt fără legătură pentru că dacă toate expresiile sistemului axiomatic devin adevărate pentru valorile respectivelor variabile atunci el este consistent (consistența în sens semantic).

Întrebarea este dacă toate expresiile derivabile sunt logic valide sau dacă nu cumva există astfel de expresii valide care să

nu fie derivabile ca teoreme (sau teze) într-un sistem? Această întrebare vizează *completitudinea* sistemului. Există şi aici două sensuri – o completitudine în sens larg (sau slab) şi o completitudine în sens restrâns (sau tare). În sens larg sistemul este complet dacă orice expresie validă sau derivabilă în sistem; în sens restrâns sistemul este complet dacă adăugarea unei expresii care nu este derivabilă în sistem face sistemul inconsistent.

Am văzut că în sens restrâns sistemul T nu este complet pentru că, relativ la operaţia de CP-transformare, expresia $p \rightarrow Lp$ se comportă ca şi $Lp \rightarrow p$, ea nu duce la expresii false. Pe de altă parte, dacă am adăuga sistemului această expresie, fie ca axiomă fie ca teoremă, am obţine expresii de genul $Mp \rightarrow p$, $MLp \rightarrow Lp$, $MMp \rightarrow \sim Mp$ ş.a care, intuitiv vorbind, nu sunt adevărate (nu se poate spune că dacă o propoziţie p este posibilă atunci ea este adevărată). Prin urmare, în acest sens restrâns, sistemul T nu este complet. Dar este el complet în sens larg? Ca să putem răspunde acestei întrebări ar trebui să dispunem de un concept semantic de validate pentru logica modală, un concept care nu este atât de simplu de definit ca în logica propoziţiilor sau logica predicatelor. În esenţă rostul acestui capitol este de-a arăta cum poate fi definit pentru logica modală conceptul de validitate. Pentru că validitatea este un concept semantic problema constă în a arăta cum se construieşte semantica sistemelor modale de tip Lewis pe care le-am discutat în capitolul anterior.

2. CE ESTE SEMANTICA LOGICĂ?

Din punct de vedere logic am definit limbajul drept o mulțime de semne şi de reguli de operare cu semnele (= gramatica limbajului) destinate conservării (păstrării), prelucrării şi comunicării de informații. Unitatea de bază a limbajului este expresia (sau formula). Relativ la expresie identificăm trei categorii de raporturi: 1) raportul expresiei cu simbolul (semnul) şi cu alte expresii; 2) raportul expresiei cu obiectul, respectiv clasa de obiecte pentru care stă şi 3) raportul expresiei cu acțiunile subiectului. Primul este un raport sintactic, al doilea, unul semantic iar al treilea un raport pragmatic. Corespunzător vom defini sintaxa, semantica şi pragmatica logică, cele trei discipline ale semioticii logice.

1) *Sintaxa logică* = Ramura semioticii care studiază limbajul din punct de vedere al modului în care se constituie expresiile şi al raporturilor formale dintre expresii.
2) *Semantica logică* = Ramura semioticii care studiază limbajul din perspectiva raporturilor expresiilor cu obiectul şi al raporturilor dintre expresii în baza raporturilor lor cu obiectul.
3) *Pragmatica logică* = Ramura semioticii care studiază limbajul din perspectiva raporturilor dintre expresii şi acțiunile subiectului.

"Întreaga ştiință a limbajului ce constă din cele trei părți menționate, spune Carnap, se numeşte semiotică" [1].

Pentru problemele urmărite în această parte a cursului ne interesează cu prioritate latura semantică a limbajului. Există până în momentul de față câteva semantici de referință care se distinge

prin metodele de analiză propuse. Este vorba în primul rând de semantica lui Frege cunoscută şi sub numele de *metoda relaţiei de denumire.* Ea a fost dezvoltată după Frege în diferite moduri de către B. Russell, A. Tarski, A. Church, O. Quine ş.a. astfel că în momentul de faţă ea nu se mai prezintă sub forma unei metode unice şi unitare de analiză a limbajului. Este vorba, apoi, de semantica lui R. Carnap cunoscută şi sub numele de *metoda extensiunii şi intensiunii.* Este prima metodă de analiză semantică ce poate fi aplicată şi sistemelor de logică modală. J. Hintikka, S. Kripke, R. Montagne, S. Kanger sunt câţiva dintre autorii mai importanţi care au perfecţionat şi în final au elaborat acest gen de semantică modală cunoscută astăzi sub numele de *semantica lumilor posibile* sau *semantica în stil Kripke.*

2.1. CONCEPTUL DE SISTEM SEMANTIC

Cercetările de semantică logică pot fi împărţite şi după alte criterii. Carnap distinge între *semantica descriptivă* şi *semantica pură.* Prin semantica descriptivă (sau aplicată) Carnap înţelege descrierea şi analiza aspectelor semantice ale unor limbaje particulare, istoric constituite, cum ar fi limba română, bunăoară, sau oricare altă limbă naturală. Se poate deosebi şi aici semantica descriptivă generală care se referă la limbajul natural în general şi semantica descriptivă specială, cu aplicabilitate doar la un singur limbaj sau clasă de limbaje.

Semantica pură studiază, la rândul ei, probleme semantice ale unor sisteme cu sau fără legătură cu limbajele naturale. Acest

gen de semantică vizează concepte ca *adevăr, interpretare, validitate* şi altele de acelaşi tip cu ele. Spre deosebire de semantica descriptivă care descrie în principal fapte şi care este o ştiinţă empirică, semantica pură este analitică, ea nu are conţinutul factual.

În centrul cercetărilor de semantică pură stă ideea de sistem semantic.

Definiţie. Prin "sistem semantic" (sau "sistem interpretat") înţelegem un sistem de reguli (formulate în metalimbaj) cu privire la un limbaj obiect ce determină condiţiile de adevăr ale expresiilor construite în acest limbaj obiect.

Voi exemplifica în continuare sistemele semantice S1, S2, S3 construite de Carnap în cartea sa *Semnificaţie şi necesitate* [2] cu ajutorul cărora voi examina principale concepte ale metodei de analiză semantică preconizate de el.

Sistemul S1. Acest sistem corespunde limbajului logic obişnuit ce conţine sintaxa logicii predicatelor plus câteva simboluri mai speciale. Iată lista principalelor simboluri ce alcătuiesc acest sistem:

Operatori logici obişnuiţi: ~ (non), · (şi), ∨ (sau), → (implică), ≡ (echivalent)

Variabile individuale: x, y, z,...

Cuantori: (x), ∃x (pentru orice x), (există x).

Operatori speciali: (operatorul descripţiei) şi λ(operatorul abstracţiei);

Constante individuale: *a, b, c,...*;

Constante predicative: *F,G,H,...*

Precizări:

1) Operatorul " " se aplică unor matrici propoziționale de forma *F*x, *G*x etc. pentru a forma descripții: x Fx, x Gx (acel x astfel că *F*x, sau acel x astfel că *G*x). Singurele, regulile sintactice nu sunt suficiente pentru a ne asigura de unicitatea descripției.

2) Operatorul λx formează expresii de genul λx *F*x (acei x astfel că x este *F*). Operația λx (... x ...) a ≡ (... a ...) se numeşte *conversiune*.

3) Numărul constantelor predicative este finit, în schimb, constantele individuale pot fi în număr infinit

4) Sistemul S1 conține numai propoziții închise (expresiile sistemului nu conțin variabile libere).

Pentru construcția sistemului Carnap introduce patru categorii de reguli:

1) reguli de formare, 2) reguli de desemnare, 3) reguli de adevăr şi 4) reguli de domeniu. Regulile de formare constituie o definiție recursivă pentru conceptul de "expresie în S"; regulile de desemnare definesc recursiv conceptul de "semnificare în S" iar regulile de adevăr definesc conceptul de "adevăr în S". Regulile de domeniu vom vedea că pot defini un concept mai special cum ar fi cel de *adevăr necesar* sau *adevăr logic*. Să examinăm aceste reguli pe rând.

1) *Regulile de formare.* Sunt cele cunoscute din logica simbolică aşa că nu insist asupra lor.

2) *Reguli de desemnare.* Pentru exemplificare voi reproduce, după Carnap, câteva exemple de constante individuale şi predicative introduse prin această categorie de reguli:

"S" – W. Scott,

"W" – cartea Wawerley,

"Hx" – "x este om",

"Rax" – "x este animal raţional",

"Fx" – "x este fără pene",

"Bx" – "x este biped",

"Axy" – "x este autorul lui y".

Pe baza acestor reguli fiecare constantă individuală sau predicativă are o semnificaţie precisă (univocă). La un loc, cele două categorii de constante formează clasa constantelor descriptive.

3) *Reguli de de adevăr.* Există mai multe tipuri de reguli de adevăr după mulţimea expresiilor generate de regulile de formare.

a) *Reguli de adevăr pentru popoziţii atomare.* O propoziţie atomară (sau elementară) formată dintr-o constantă predicativă urmată de o constantă individuală este adevărată în S1 dacă individul la care se referă constanta individuală are proprietatea la care se referă constanta predicativă. Pentru cazul particular al propoziţiei"Bs" (= "Scott este biped") această regulă conduce la următorul rezultat:

Propoziţia "Bs" este adevărată dacă şi numai dacă Scott este biped.

Recunoaştem în această definiţie schema definiţiei adevărului la Tarski de unde rezultă că semantica lui Carnap nu este total independentă de alte metode de analiză semantică.

b) *Regulă de adevăr pentru V.* O propoziţie Ui ≡ Uj este adevărată în S1 dacă ambele propoziţii sunt adevărate sau ambele sunt false.

În baza acestor reguli se pot introduce în continuare câteva definiții cum ar fi:

Definiția 1. Ui este falsă în S1 = df ~ Ui, este adevărată în S1.

Definiția 2. Ui este echivalentă cu Uj în S1 = df Ui ≡ Uj este adevărată în S1. (Aici "≡" este ceea ce în mod obişnuit numim echivalență materială").

2.2. DESCRIERI DE STARE ŞI DOMENII

Cu ajutorul acestei metode de analiză semantică Carnap construieşte definiții pentru o serie de concepte logice printre care figurează şi conceptele modale de *necesar, posibil, imposibil* şi *contingent.* Esențiale pentru aceste definiții sunt L-conceptele pe care le introduce cu ajutorul ideilor de *descriere de stare şi domeniu.*

Definiția 1. O clasă de propoziții în S1 care conține pentru orice propoziție atomară în S1 sau această propoziție sau negația ei dar nu pe amândouă se numeşte descriere de stare în S1.

Voi explica acest concept cu ajutorul unui exemplu simplu. Presupunem că sistemul semantic S1 conține o singură constantă individuală, pe care o notăm cu *a* , şi trei constante predicative – *F*1, *F*2, şi *F*3. Aceste constante descriptive formează propoziții cum ar fi F 1*a*, F 2*a*, ~ F 3*a*, ~ F 2*a* etc. Este uşor de arătat că există în total 2^3 clase de asemenea propoziții care să conțină fiecare propoziție (cu sau fără negație) dar care nu conțin o propoziție împreună cu negația ei. Aceste clase sunt descrierile de stare despre care vorbeşte Carnap:

$D_1 = \{F_1a, F_2a, F_3a\}$

$D_2 = \{F_1a, F_2a, \sim F_3a\}$

$D_3 = \{F_1a, \sim F_2a, F_3a\}$

.....

$D_8 = \{\sim F_1a, \sim F_2a, \sim F_3a\}$

Dacă universul de discurs conține numai obiectul denotat de *a* şi proprietățile F_1, F_2, F_3 atunci fiecare descriere de stare spunem că descrie o stare posibilă a universului. Dintre acestea doar una corespunde stării lui reale, de aceea, o vom numi descrierea adevărată de stare. Carnap asociază descrierile de stare cu lumile posibile (la Leibniz) şi cu stările posibile de lucruri (la Wittgenstein): "Există o descriere de stare şi numai una care descrie starea reală a universului; ea este aceea care conține toate propozițiile atomare adevărate precum şi negațiile acelora care sunt false; ca urmare, noi vom numi descriere adevărată de stare. O propoziție de o formă oarecare este adevărată dacă şi numai dacă ea are loc în descrierea adevărată de stare".[2] În alt loc, Carnap notează: "Aşadar, descrierea de stare reprezintă lumile posibile ale lui Leibniz sau stările posibile de lucruri (state of affairs) ale lui Wittgenstein".[2]. În concluzie, o propoziție are loc într-o descriere de stare dacă ea ar fi adevărată când descrierea de stare la care aparține ea este adevărată.

Definiția 2. Clasa tuturor descrierilor de stare în care are loc propoziția Ui se numeşte domeniul lui Ui.

Următoarele reguli se numesc reguli de domeniu şi fac legătura dintre adevărul propozițiilor şi mulțimea descrierilor de stare în care ele au loc.

1) O propoziție atomară are loc într-o descriere de stare dacă şi numai dacă propoziția aparține acestei descrieri de stare.

2) ~ Ui are loc într-o descriere de stare dacă şi numai dacă Ui nu are loc în această descriere de stare.

3) Ui $\vee$ Uj are loc într-o descriere de stare dacă şi numai dacă cel puțin una dintre cele două propoziții are loc în respectiva descriere de stare.

4) Ui $\rightarrow$ Uj are loc într-o descriere de stare dacă şi numai dacă Uj are loc în acea descriere de stare sau nici una nu are loc.

5) Ui $\equiv$ Uj are loc într-o descriere de stare dacă ambele propoziții au loc sau niciuna nu are loc în cea descriere de stare.

6) (x) Ux are loc într-o descriere de stare dacă şi numai dacă propozițiile individuale *Ua, Ub,...* au loc în acea descriere de stare.

Să exemplificăm aceste reguli pe cazul particular despre care am vorbit la început. Fie propoziția $F_3a \rightarrow F_2a \vee F_1a$. Domeniul propozițiilor F_3a şi F_1a vor fi:

$$D(F_3a) = \{D_1, D_3, D_5, D_7\}.$$

$$D(F_1a) = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}.$$

Domeniul lui $\sim F_2\, a$ se determină conform cu regula 2):

$$D(\sim F_2a) = \{D_3, D_4, D_7\, D_8\}.$$

Determinăm în continuare domeniul propoziției $\sim F_2a \vee F_1a$:

$$D(\sim F_2a \vee F_1a) = \{D_1 - D_4, D_7, D_8\}.$$

În final, domeniul expresiei va fi

$$D(E) = \{D_1, D_3, D_7\}.$$

2.3. L – CONCEPTELE

Regulile de desemnare împreună cu regulile de domeniu dau o *interpretare* pentru orice propoziție în S1. Aceasta pentru că a şti semnificația unei propoziții înseamnă a şti în care dintre cazurile posibile ea este adevărată şi în care nu. Mai departe Carnap face următoarea convenție care este esențială pentru metoda de analiză semantică preconizată de el. O propoziție Ux este L – adevărată (citeşte "logic adevărată") într-un sistem semantic S dacă adevărul ei poate fi stabilit numai pe baza regulilor semantice fără referire la fapte extralingvistice.

Definiție. O propoziție Ux este L – adevărată dacă Ux are loc în orice descriere de stare.

Alte definiții importante:

1) Ux este L – falsă = $\sim U_i x$ este L – adevărată,

2) $U_i x$ L –implică $U_j x$ = Propoziția $U_i x \rightarrow U_j x$ este L – adevărată,

3) U_i este L – echivalentă cu U_j = Propoziția $U_i \equiv U_j$ este L – adevărată,

4) U_i este L – determinată = U_i este L – adevărată sau L – falsă,

5) U_i este L – indeterminată = U_i nu este L – determinată,

6) U_i este F – adevărată = U_i este adevărată dar nu L – adevărată,

7) U_i este F – falsă = $\sim U_i$ este F – adevărată,

8) U_i F – implică U_j = propoziția $U_i \rightarrow U_j$ este F – adevărată,

9) U_i este F – echivalentă cu U_j = propoziția $U_i \equiv U_j$ este F – adevărată.

(În aceste definiții F – adevărat înseamnă adevărat factual iar L adevărat – adevărat logic).

2.4. CONTEXTE EXTENSIONALE ŞI INTENSIONALE

Conceptele de echivalență şi L – echivalență pot fi extinse dincolo de domeniul propozițiilor. Operatorul "≡" leagă nu doar propoziții ci orice designatori cu condiția ca ei să fie de acelaşi tip. Designator, la Carnap, este orice expresie căreia i se poate aplica metoda de analiză semantică. În clasa designatorilor vor intra: 1) propoziții, 2) predicate, 3) functori, 4) expresii individuale.

Definiție. Dacă A şi B sunt designatori de acelaşi tip în S1, atunci

1) A este echivalent cu B = (A ≡ B) este adevărată,

2) A este L – echivalent cu B = (A ≡ B) este L – adevărată,

3) A este F – echivalent cu B = (A ≡ B) este F – adevărată.

În continuare se precizează că:

a) Doi designatori au aceeaşi extensiune dacă ei sunt echivalenți.

b) Doi designatori au aceeaşi intensiune dacă sunt L–echivalenți.

Pentru că în continuare ne interesează doar propozițiile vom spune că extensiunea propoziției este valoarea ei logică iar intensiunea este judecata pe care o exprimă. O expresie A este extensională relativ la B dacă B face parte din A şi B este intersubstituibilă cu o expresie echivalentă. Un context logic este extensional dacă conține numai expresii extensionale. O expresie este neextensională dacă conține expresii ce nu se pot substitui cu expresii echivalente.

2.5. L – CONCEPTE ŞI MODALITĂŢI

Sistemul semantic S2 se formează din S1 prin adăugarea simbolului L (necesar). O judecată este necesară dacă orice propoziţie care exprimă această judecată este L – adevărată. În termenii necesităţii se pot defini şi celelalte modalităţi.

Definiţie. Pentru orice propoziţie p, propoziţia Lp este adevărată dacă şi numai dacă p este L – adevărată.

Exemplificare: Hs este F – adevărată, Hs $\vee \sim$ Hs este L–adevărată.

Dacă Lp corespunde necesarului, în cazul de faţă L–adevărului, celelalte modalităţi pot fi definite după cum urmează:

1) Imposibil (simbolic L $\sim$ p, $\sim$ M $\sim$ p) = df L – fals,

2) Contingent (simbolic $\sim$ Lp $\cdot \sim$ L $\sim$ p) = df Factual,

3) Non-necesar (simbolic $\sim$ Lp) = df Non – L – adevărat,

4) Posibil (simbolic Mp) = df Non – L – fals,

5) Non-contingent (simbolic Lp $\vee$ L $\sim$ p) =df L – determinat.

Interpretarea dată de Carnap acestor modalităţi satisface sistemul modal S5. Este prima interpretare semantică a unui astfel de sistem modal.

3. SEMANTICA LUMILOR POSIBILE

În capitolul V al cărţii sale *Semnificaţie şi necesitate,* R. Carnap se referă la câteva din problemele mai importante cu care se confruntă sistemele modale de tip Lewis: "Un mare număr de sisteme diferite de logică modală au fost construite de către C.I. Lewis şi alţii. Aceste sisteme diferă între ele prin ipotezele lor de

bază prioritare la modalități. Se pune, de exemplu, chestiunea dacă sunt adevărate toate propozițiile de forma "Np ⊃ NNp" adică, în cuvinte: "dacă este necesar p atunci este necesar că este necesar p". Unele dintre sistemele menționate răspund afirmativ la această chestiune, altele dau răspunsuri negative sau lasă chestiunea nedecisă. [...] Mai există şi alte aspecte prin care sistemele diferă între ele. Toate aceste deosebiri se datorează după părerea mea, faptului că conceptul de necesitate logică nu este suficient de clar; de exemplu el poate fi înțeles astfel încât propozițiile amintite să fie adevărate, dar mai poate fi conceput şi de aşa manieră încât aceste propoziții, sau cel puțin unele dintre ele să fie false". [2]

Este curios că toate aceste sisteme formale pe care le-am numit în acest curs "sisteme de tip Lewis" au fost concepute inițial tocmai pentru a preciza ideile intuitive de necesar, posibil, şi toate celelalte. Or, dacă aceste categorii modale rămân în continuare neclare, cum se exprimă Carnap, înseamnă că doar cu mijloace sintactice nu putem construi un sistem corespunzător de logică modală. Hotărâtoare este interpretarea semantică a acestor modalități. Scopul lui în acest capitol este să arate că metoda de analiză semantică pe care a propus-o în *Semnificație şi necesitate* se poate extinde şi asupra sistemelor modale astfel că în sistemul lui semantic S2 sunt construite interpretările principalelor modalități. După cum am arăta în prima parte a acestui capitol I adevărul, L – falsul şi Factualul sunt explicanți pentru conceptele modale de *necesar, imposibil* şi *contingent.*

Pornind de la ideile lui Carnap (în special de la conceptul său de descriere de stare) precum şi de la o imensă literatură filosofică adunată pe această temă, la începutul anilor şaizeci o serie de autori (S. Kripke, J: Hintikka, S. Kanger, R. Montague ş.a.) au reuşit să construiască o metodă de analiză semantică destinată exclusiv sistemelor de logică modală. Această metodă de analiză semantică este cunoscută astăzi sub numele generic de "semantica lumilor posibile" sau "semantica în stil Kripke". Categoriile de bază cu care operează această metodă sunt:

1) Mulţimea W = { w1, w2, ...} numită şi mulţimea lumilor posibile. Lumea noastră aparţine mulţimii W, de vreme ce este reală ea este, implicit, o lume posibilă (tot ce este real este şi posibil). Pentru consideraţiile ce vor urma ca şi pentru unele probleme filosofice despre care vom vorbi în final este bine să observăm că mulţimea W este o mulţime infinită şi numărabilă.

2) Relaţia de accesibilitate R (sau de posibilitate) definită pe elementele mulţimii W. Prin wi R wj înţelegem că lumea wj este accesibilă lumii wi sau că o propoziţie adevărată în wj este posibilă în wi.

3) Mulţimea F de formule construite după regulile cunoscute în sintaxa sistemului considerat. Poate că nu este lipsit de importanţă să notăm că aceste reguli sunt practic aceleaşi în toate sistemele şi că regulile de interpretare pe care le vom enunţa mai jos acţionează ca "reguli de selecţie" în raport cu fiecare sistem modal în parte

4) Mulţimea celor două valori logice {1, 0} unde "1" reprezintă adevărul şi "0" falsul.

5) Funcția de valorizare V: F x W → {1, 0} care restrânge adevărul unei formule α la o lume posibilă sau la o submulțime (nestrictă) de lumi posibile din W. Prin V (α, wi) = 1 înțelegem că α este adevărată în lumea posibilă wi.

Funcția V se defineşte inductiv după structura expresiei:
V(~p, wi) = 1 dacă şi numai dacă V(p, wi) = 0,
V(p∨q, wi) = 1 dacă şi numai dacă V(p, wi) = 1 sau V(q, wi) = 1.
V(Lp, wi) = 1 dacă şi numai dacă V(p, wi) = 1 şi pentru orice wj ∈ W astfel că wi R wj are loc V(p, wj) = 1,
V(Mp, wi) = 1 dacă şi numai dacă există cel puțin o lume posibilă wj ∈ W astfel că wi R wj şi V(p, wj) = 1.

Observație. În formularea acestor reguli am luat termenul de "lume posibilă" în înțelesul lui intuitiv şi am considerat că lumea noastră este una dintre lumile posibile între multe altele. În ultima parte a cursului vom avea ocazia să vedem că acest concept (termen) de lume posibilă nu este atât de simplu de înțeles aşa cum pare el la prima vedere şi că s-au propus în ultimele decenii diferite moduri de înțelegere a lui. Să observăm, de asemenea, că necesarul se defineşte prin cuantificare universală relativ la mulțimea lumilor posibile, iar posibilul prin cuantificare esențială. De altfel trebuie precizat că în construcția sistemului său M, von Wright a pornit tocmai de la analogiile formale dintre operatorii modali L, M şi cuantorii ∀, ∃.

În legătură cu definițiile conceptelor de *necesar* şi *posibil* am atras, cu altă ocazie, atenția asupra circularității acestor definiții pe care aici vreau să le reiau foarte pe scurt. În esență, este vorba de faptul că posibilitatea propozițiilor şi lumile posibile

reprezintă două fețe ale aceleeaşi idei generale de posibil ceea ce face ca definițiile de mai sus să sufere de o evidentă circularitate. A spune că o propoziție este posibil adevărată dacă este adevărată în cel puțin o lume posibilă nu înseamnă câtuşi de puțin a rezolva problema posibilului ci doar a o "deplasa". Prin urmare, trebuie lămurită problema lumilor posibile şi arătat clar ce înseamnă din punct de vedere logic (şi chiar filosofic) o lume posibilă. Aceasta pe de o parte. Pe de altă parte cred că trebuie revizuită şi ideea circularității în definiție. În logica tradițională se face distincție între definiția tautologică (sau *idem per idem*) şi definiția circulară. Reamintesc cu această ocazie că o definiție tautologică este o definiție de forma A = df A în care *definiensul* repetă (sau conține) într-un fel sau altul *definiendumul*. O definiție este în cerc vicios dacă este tautologică sau dacă poate fi adusă după un număr finit de paşi la o definiție tautologică. Prin urmare, definiția tautologică este un caz limită a cercului vicios. Or, din acest punct de vedere trebuie spus că definițiile circulare pot fi de "rază" mai mică sau mai mare şi că nu toate definițiile circulare sunt circulare în acelaşi fel. Aceasta duce la următoarea concluzie, foarte importantă pentru problema definirii modalităților: nu toate definițiile circulare sunt triviale, pot fi cazuri în care cercul definiției să fie diferit de zero şi că în astfel de cazuri, deşi circulară, definiția se ia ea valabilă. Cred că ceva din acest gen avem şi în cazul lumilor posibile. Dacă reuşim să producem un concept de lume posibilă satisfăcător din punct de vedere logic atunci şi problema circularității definiției posibilului este rezolvată.

Cu aceste precizări să revenim la problema modalităților. Ne reamintim din capitolul precedent că problema care se pune relativ la sistemele modale de tip Lewis era de-a defini pentru această categorie de sisteme conceptele semantice de *verificabilitate*, *realizabilitate* şi *validitate*. Aceasta înseamnă a dispune de o semantică corespunzătoare pentru sistemele menționate. Centrale pentru acest gen de semantică logică sunt conceptele de *model* şi *structură de modele*. Definițiile care urmează sunt adaptate în principal după Hughes – Cresswell [3] şi Sorin Vieru [7].

1) Se numeşte *model* pentru un sistem nespecificat de logică modală un triplet de forma V = < W, R, V> unde W este mulțimea lumilor posibile , R – relația de accesibilitate, iar V funcția de valorizare.

2) O structură de modele este tripletul de forma $\mathcal{V}$ = < W, R, V> unde $\mathcal{V}$ este mulțimea modelelor de tipul V pentru un sistem dat.

3) O formulă α este verificată într-un model V definit pe o structură de modele $\mathcal{V}$, într-o lume w, dacă V(α, w) = 1.

4) O formulă α este realizabilă dacă este verificată în cel puțin un model dintr-o structură de modele.

5) O formulă α este validă dacă este verificată în orice model din orice structură de modele.

Spre deosebire de logica propozițiilor şi logica predicatelor unde conceptele de validitate, realizabilitate, model, etc. sunt general valabile, în logica modală situația este radical schimbată. Aceste concepte se particularizează aici pentru fiecare sistem

modal în parte prin specificarea proprietăților formale ale relației R. Se ajunge astfel la concepte ca T– *model*, S4, S5 – *model*, T–*realizabilitate*, S4 – *realizabilitate*, T– *validitate* şi aşa mai departe. Un T – *model*, de exemplu, este un model V în care relația R este reflexivă. Dacă R este reflexivă şi simetrică vorbim de un B – *model*; dacă este reflexivă şi tranzitivă de un S4–model, iar dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă de un S5 – model.

Relativ la sistemul T se poate demonstra că: 1) orice formulă derivată în T este T– validă (teorema de consistență), şi 2) orice formulă T– validă este derivabilă în T (teorema de completitudine).

Se pune în mod firesc întrebarea de ce relația R trebuie diferențiată de la caz la caz prin specificarea proprietăților ei? Trebuie spus că aceste proprietăți nu sunt date la întâmplare, ele sunt *cerute* de condițiile concrete ale aplicării regulilor de adevăr la expresiile sistemului modal consistent. Să presupunem că vrem să demonstrăm validitatea expresiei $Lp \rightarrow p$ care este prima axiomă modală din T. Demonstrația se face prin reducere la absurd.

Presupunem mai întâi că expresia este nevalidă. Pentru că ea este o implicație ar trebui să existe un model, şi deci o lume posibilă wi în care antecedentul ei să fie adevărat şi consecventul fals. Dar pentru ca Lp să fie adevărată în wi ar trebui ca p să fie adevărată în toate lumile posibile accesibile lui wi. Prin urmare, $Lp \rightarrow p$ este falsă în wi dacă p este adevărată în toate lumile posibile accesibile lui wi şi falsă în wi. Acest lucru este posibil numai dacă wi nu este accesibilă ei însăşi, altfel spus, dacă relația

de accesibilitate nu este reflexivă. Dacă relația este reflexivă atunci Lp→p este validă după cum validă va fi orice altă expresie logic dedusă din ea.

Asemănător se demonstrează nevaliditatea. Să presupunem că vrem să testăm în T expresia L(p→Lq) → (p→Lq). Presupunem, la fel, că există o lume wi în care L(p→q) este adevărată şi p →Lq falsă. De aici rezultă că p→q este adevărată în orice lume posibilă accesibilă lui wi. Pentru ca p → Lq să fie falsă va trebui ca p să fie adevărată în wi şi să existe o lume posibilă accesibilă lui wi, să zicem wj, în care q să fie falsă. Înseamnă că în wi expresia p este adevărată şi Lq falsă aşa că p →Lq este falsă. Pentru că antecedentul implicației este adevărat şi consecventul fals, implicația este falsă.

Există şi alte interpretări care pun în evidență nevaliditatea acestei implicații. În *Introduction to Modal Logic,* Hughes şi Cresswell din următorul exemplu de raționament care are la bază expresia pe care o discutăm: "În mod necesar dacă plouă în luna decembrie atunci plouă de sărbători; deci, dacă plouă în decembrie atunci *în mod necesar plouă de sărbători*". Propoziția subliniată este falsă, de aceea, întreaga concluzie este falsă: Având premisa adevărată şi concluzia falsă raționamentul este nevalid. Cu aceasta problema validității în logica modală este rezolvată. Demonstrând că axiomele sistemelor modale discutate sunt valide şi că regulile de deducție conservă această proprietate a axiomelor s-a demonstrat că orice formulă derivabilă este validă şi invers. Este ceea ce am numit la început consistența şi completitudinea sistemelor. Faptul că în toate aceste demonstrații

intervin modele de un tip special pe care nu le-am întâlnit în celelalte discipline logice reprezintă una din trăsăturile distinctive ale logicii modale.

APLICAȚII

1. Ce este semantica logică? Construiți un limbaj formalizat şi arătați cum poate fi el interpretat semantic. Puteți ilustra conceptele semantice discutate în acest capitol pentru limbajul considerat?

2. Definiți (eventual comentați) conceptul de sistem semantic la R. Carnap.

3. Ce sunt descrierile de stare? Comentați afirmația lui Carnap "Aşadar, descrierea de stare reprezintă lumile posibile ale lui Leibniz sau stările posibile de lucruri (state of affairs) ale lui Wittgenstein".

4. Construiți câteva exemple de descrieri de stare şi arătați cum se aplică în cazurile respective regulile de adevăr şi regulile de domeniu.

5. Ce sunt L – conceptele şi cum pot fi ele aplicate în definirea modalităților?

6. Ce înseamnă *model* şi *structuri de modele* în semantica lumilor posibile?

7. Definiți conceptele de *verificabilitate*, *realizabilitate* şi *validitate* pentru fiecare sistem modal în parte.

8. Demonstrați în semantica lumilor posibile că expresia $L(p \rightarrow q) \rightarrow (Lp \rightarrow Lq)$ este T – validă. Demonstrați, de asemenea, că $p \rightarrow Mp$ este validă, iar $p \rightarrow Lp$ nevalidă.

9. Cum se demonstrează în semantica lumilor posibile că sistemele T, B, S4 – S5 sunt consistente şi complete?

NOTE

[1] Carnap, R., *Introduction to Semantics*, Dover Publications, Inc. New York, 1963.

[2] Carnap, R., *Semnificație şi necesitate,* Editura Dacia, Cluj, 1972.

[3] Hughes, G.E., Cresswell, MJ., *Introduction to Modal Logic* Methuen &Co. Ltd., London, 1972.

[4] Benthem, J. van., *A Manual of Intensional Logic,* CSLI, Ventura Hall, Standford University Press, Standford, 1985.

[5] Hintikka, J., *Models for Modalities,* D. Reidel Publ. Company, Dordrecht, Holland, 1969.

[6] Marcus, R.B., *Modalities,* Oxford University Press, New York, Oxford, 1993.

[7] Vieru, S., *Semantica "lumilor posibile" şi logica modală* în vol. *Direcții în logica contemporană,* Editura Ştiințifică, Bucureşti, 1974, pag. 139-165.

V PROBLEME FILOSOFICE ÎN PERSPECTIVA LOGICII MODALE

În încheiere doresc să punctez foarte pe scurt câteva din problemele filosofice mai importante care se discută astăzi în legătură cu logica modală. Chiar dacă au fost prilejuite de achiziții mai recente din dezvoltarea logicii modale trebuie spus că nu toate aceste probleme sunt inedite, că unele dintre ele au fost cunoscute logicienilor încă din antichitate. Reluate într-o nouă formă şi cu argumente noi, multe dintre problemele ce urmează a fi discutate se dovedesc a fi subsumate unor poziții filosofice clasice ceea ce subliniază încă odată caracterul profund filosofic al disciplinei pe care o discutăm. Nici enumerarea şi nici tratarea acestor probleme nu este completă. Aşa cum am spus, doresc doar să semnalez aceste probleme şi să arăt, eventual, cam în ce zonă a logicii şi filosofiei logicii se plasează ele.

1) Problema distincției dintre logic, ontologic şi epistemologic în abordarea modalităților.

În abordarea modalităților aletice ne-am dat seama cât de important este să nu pierdem legătura cu punctul de vedere

ontologic, să păstrăm simetria (termenul s-ar putea să nu fie cel mai nimerit) între ceea ce este adevărat şi ceea ce este în general. La Aristotel se observă cel mai bine această grijă pentru păstrarea raportului dintre logic şi ontologic în abordarea modalităților deşi adeseori el trece neanunțat dintr-un plan în celălalt ceea ce nu este lipsit de riscuri. În orice caz, atât necesarul cât şi posibilul şi contingentul pot fi luate în sens logic şi în sens ontologic. Necesitatea ontologică (fizică sau naturală, cum mai este numită ea) se referă la lucruri şi la proprietățile lor, în timp ce necesitatea logică se referă la propoziții şi la valoarea lor de adevăr. Poate fi lumea şi altfel de cum este? Dacă da, atunci ea este în mod necesar aşa cum este dar atunci se pune problema dacă necesitatea însăşi este necesară sau contingentă. Cineva ar putea spune că în mod întâmplător există necesarul dar că în mod necesar există întâmplătorul şi nu văd de ce nu ar fi logică o asemenea punere a problemei. Dacă necesar înseamnă ceea ce nu poate fi altfel decât este atunci cel mai corect este să privim lucrurile în relativitatea lor şi să nu pretindem a descoperi necesități absolute. În mod necesar lucrurile cad pe verticală, apa fierbe la 100°C şi aşa mai departe dar această necesitate este relativă la sistem, la un ansamblu de condiții pe care uneori le cunoaştem alteori nu. Aceasta face ca de multe ori ceea ce apreciem noi ca fiind necesar să fie condiționat de cunoaşterea unor lucruri ceea ce aduce în discuție componenta epistemologică a problemei.

Nici în logică problema nu se pune mult diferit. Am văzut că există o necesitate modală (cu cele două forme ale ei – *de dicto* şi *de re*) şi o necesitate inferențială. Când Aristotel spune:

"Silogismul este o vorbire (logos) în care dacă ceva este dat, altceva decât datul urmează cu *necesitate* din ceea ce a fost dat" el are în vedere necesitatea inferențială, o necesitate relativă. Adevărul propoziției A este relativ la adevărul propozițiilor B şi C în sensul că ori de câte ori B şi C sunt adevărate, A este cu necesitate adevărat. Dar este suficient acest lucru pentru a vorbi de necesitate în general? Altfel spus, propoziția lui Aristotel "Este necesar să fie" trebuie apreciată relativ la ceva sau este o necesitate *simpliciter*, o necesitate în sens absolut sau necondiționat? Cu toate că de multe ori noi ne comportăm ca şi când am avea de-a face cu necesități absolute s-ar putea foarte bine întâmpla ca aceste necesități absolute să nu fie altceva decât forma prescurtată a unor necesități relative. Multe din proprietățile categoriei logice de *necesar* care au stârnit atâtea controverse printre filosofi şi logicieni ar putea dobândi în condițiile unei atari relativizări un alt înțeles.

S-a discuta şi se discută în continuare dacă se poate da o tratare unitară acestor sensuri şi accepțiuni ale termenului necesar? Altfel spus, toate aceste sensuri logice, epistemologice şi ontologice ale necesității ar putea fi privite ca particularizări ale unui concept mult mai general de necesitate? S-ar putea încă foarte mult discuta despre această problemă atât cu argumente *pro* cât şi *contra* însă din rațiuni pragmatice (cel puțin) cred că este mai prudent să le tratăm separat. Rămâne o problemă a filosofiei dacă şi în ce măsură putem noi ajunge la o asemenea înțelegere a necesității.

2) Problema raportului analitic-sintetic, a priori a posteriori

În viziunea lui Kant propozițiile analitice sunt o specie a propozițiilor categorice în care predicatul este inclus sau presupus de subiect. În conținutul noțiunii de *pătrat* intră nota "a avea patru laturi" astfel că propoziția "Pătratul are patru laturi" este o propoziție necesar adevărată sau analitică. Negația unei asemenea propoziții este o încălcare a principiului noncontradicției de aceea Leibniz a găsit de cuviință să întemeieze adevărul propozițiilor pe două mari principii – principiul noncontradicției (pentru adevărurile necesare) şi principiul rațiunii suficiente (pentru adevărurile contingente).

Propozițiile analitice sunt toate propoziții a priori, adică propoziții cunoscute înainte şi independent de orice experiență. Dar dacă *analitic* este un concept logic, *a priori* este unul epistemologic şi atunci problema care se pune este dacă cele două pot fi identificate, dacă putem noi lua o condiție epistemologică drept criteriu de recunoaştere a unor propoziții logice. Răspunsul logicienilor este că nu. Aceasta pentru că *a priori* nu este nici pe departe un concept atât de clar şi, în consecință, atât de sigur pentru a rezolva o asemenea problemă. Aceasta pe de o parte. Pe de altă parte nici conceptul de *analitic* nu poate deservi scopurilor logice atâta vreme cât el rămâne circumscris popozițiilor categorice (sau de predicație). Întrebarea care se pune este cum poate fi el extins dincolo de sfera acestor propoziții? Iată câteva dintre răspunsurile mai importante care s-au dat acestei probleme.

O propoziție P este analitică dacă şi numai dacă

- Nu poate fi falsă,
- Este adevărată în toate lumile posibile,

- Dacă non–P este contradictorie,
- Predicatul ei nu adaugă subiectului lucruri pe care acesta să nu le conțină.
- Este adevărată în virtutea principalelor sensuri pe care le au termenii care apar în ea.
- Poate fi redusă cu ajutorul definițiilor la un adevăr logic.
- Poate fi demonstrată logic.
- Este adevărat □ P.
- Este adevărată în virtutea regulilor semantice care stau la baza interpretării limbajului în care este ea formulată.

Care dintre aceste definiții ne dă adevăratul înțeles al termenului *analitic?* Logicienii dovedesc prudență când este vorba să facă o alegere pentru că fiecare dintre definițiile enumerate (şi lista nu este încheiată) reclamă lungi discuții. Nu dispunem de o definiție care să întrunească acordul unanim aşa că problema rămâne în continuare deschisă.

3) Probleme relative la conceptul de lume posibilă

Aşa cum s-a văzut, conceptul semantic de lume posibilă îşi are rădăcinile la Carnap şi Leibniz. În *Semnificație şi necesitate* Carnap asociază descrierile de stare cu lumile posibile (la Leibniz) şi stările posibile de lucruri (la Wittgenstein). Afirmația lui Carnap trebuie luată cu rezerve pentru că, în ciuda faptului că adevărurile de rațiune sunt adevăruri în toate lumile posibile, conceptul de lume posibilă la Leibniz nu este acelaşi cu conceptul de lume posibilă din logica modală. Estre drept că Leibniz nu se ocupă în mod special de acest concept însă din multele lui menționări ne putem face o idee în legătură cu intențiile lui față de

acest concept, intenții care nu țin întotdeauna de logică ci şi de filosofie şi chiar de teologie. Iată un pasaj din *Eseuri de teodicee* carte recent tradusă şi apărută la Editura Polirom, Iaşi, 1997, în care este definit de Leibniz conceptul de lume posibilă: "Numesc lume, spune Leibniz, toată succesiunea şi toată colecția de lucruri existente, în aşa fel încât să nu se poată spune că puteau exista mai multe lumi în timpuri diferite şi în locuri diferite. Căci ar trebui să le socotim pe toate laolaltă drept o lume sau, dacă preferați, drept un univers, şi când am umple toate timpurile şi toate locurile, la fel de adevărat rămâne faptul că le-am fi putut umple într-o infinitate de moduri şi că există o infinitate de lumi posibile dintre care Dumnezeu trebuie s-o fi ales pe cea mai bună, de vreme ce el nu face nimic fără să acționeze conform rațiunii supreme". (op. cit. pag. 93).

Prin urmare, o lume posibilă este o altă organizare spațio-temporală a lucrurilor şi pentru că există o infinitate de asemenea organizări posibile există, *ipso facto,* o infinitate de lumi posibile. De vreme ce Dumnezeu a ales această organizare a lucrurilor şi nu alta, este normal ca ea să fie cea mai bună dintre lumile posibile pentru că, spune Leibniz, "dacă nu ar fi existat cea mai bună (optimum) dintre lumile posibile Dumnezeu nu ar fi creat niciuna". (op. cit. pag. 93).

În semantica lui Kripke conceptul de lume posibilă apare într-o cu totul altă lumină. Deşi în unele studii Kripke lasă să se înțeleagă faptul că lumile posibile conțin şi alte lucruri decât cele conținute în lumea actuală, în abordările lui formale termenul "lume posibilă" este un termen prim, nedefinit. Semantica lui

Kripke este o semantică pură (sau formală). Problema este cum s-ar putea transforma această semantică pură într-o semantică aplicată. Aceasta revine la a întreba ce semnificație s-ar pute acorda termenului de "lume posibilă", cum ar trebui el înțeles? Există în momentul de față câteva încercări de-a semnifica ideea de lume posibilă dintre care foarte discutate sunt două – cea elaborată de Alvin Plantinga şi cea a lui David Lewis. Pentru detalii cititorul poate consulta cartea lui Alvin Plantinga *Natura necesității* (Editura Trei, Bucureşti, 1998). Ambele soluții sunt controversate şi ridică mari probleme legate în special de posibilitatea definirii identității transmundane. Nu văd cum s-ar putea rezolva aceste probleme altfel decât schimbând modul de abordare. Vreau să spun că atâta timp cât conceptul de lume posibilă este înțeles ca un concept ontologic pe care se fundamentează semantica logicii modale dificultățile nu vor înceta să apară. Cred mai degrabă într-o soluție metodologică în care lumea posibilă să fie înțeleasă ca o idealizare în raport cu lumea reală. Adeseori în ştiință noi ne comportăm ca şi când ar exista cutare sau cutare condiții (de exemplu, ca şi când ar exista mişcare rectilinie şi uniformă, corpuri perfect elastice, perfecte albe, negre etc.). Nimic nu ne împiedică din acest punct de vedere să vedem ce s-ar întâmpla dacă ar exista mai multe lumi posibile deşi suntem conştienți de faptul că, practic, nu există decât o singură lume – lumea reală.

4) Problema esențialismului şi a necesității de re.

Ideea de *esență* este foarte des vehiculată în filosofie şi apare în diferite forme şi accepțiuni. Pentru Aristotel, cel puțin, categoria

de esență are atât o susținere filosofică cât şi una logică. Din punct de vedere logic esențiale sunt acele proprietăți ale lucrului care țin de gen. Din această cauză esențele se exprimă în primul rând prin definiții. O proprietate este esențială dacă ea este necesară pentru lucru respectiv. Cu alte cuvinte, F este necesară pentru x dacă "x este necesară F" este adevărată, simbolic "□ Fx". Din acest motiv esențialismul ne apare drept o primă şi fundamentală consecință filosofică a necesității *de re*. O interesantă teorie a necesității *de re* a formulat la noi Grigore Moisil în studiul său *Teoria modală a conceptului* (vezi *Essais sur les logiques non chrysippiennes,* 1972, p. 56)

Esențialismul, şi implicit modalitatea *de re* nu s-au bucurat de aceeaşi încredere printre filosofi şi logicienii secolului XX. Numărul nouă, spune Quine, ar fi în mod necesar prim dar dacă folosim o altă denumire pentru nouă, să zicem "numărul planetelor" atunci propoziția "Numărul nouă este necesar prim" nu mai este adevărată. Ceva asemănător susține şi W. Kneale. O proprietate este necesară doar în raport cu descripția şi nu în general. Altfel spus, propoziția "Socrate este necesar filosof" este adevărată doar în raport cu o descripție care poate sta pentru "Socrate" cum ar fi "Dascălul lui Platon", să zicem. În raport cu altă descripție cum ar fi "Soțul Xantipei" propoziția nu mai este adevărată. Ar trebui, prin urmare, ca una şi aceeaşi proprietate să fie şi necesară şi contingentă, în funcție de descripția avută în vedere.

Problema a fost reluată din perspectiva ideii de lume posibilă. O interesantă formă de esențialism este promovată în

zilele noastre de Alvin Plantinga. El face distincție între proprietăți esențiale şi esențe. Prin "proprietate esențială" Plantinga înțelege o proprietate pe care o are lucrul în toate lumile posibile în care el există. Se înțelege că din acest punct de vedere existența este nu doar o proprietate a lucrurilor individuale (ceea ce mulți nu acceptă) dar chiar o proprietate necesară a acestora. Esențialismul lui Plantinga este subsumat unei curioase forme de actualism şi de realism pe care autorul le dezvoltă într-o serie de studii ulterioare cărții sale *Natura necesității*. N-am putea spune că această formă de realism, şi implicit de esențialism, este foarte împărtăşită astăzi având în vedere numeroasele obiecții cu care a fost ea întâmpinată de specialişti.

5) Problema lumilor fictionale.

Discuțiile despre conceptul de lume posibilă au depăşit granițele logicii şi chiar ale filosofiei influențând de domenii care nu țin strict de filosofie cum ar fi critica literară, de exemplu, sau teoriile narativității. Problema care s-a pus este ce fel de realitate descriu textele literare? Un text literar sau narativ (U. Eco) se caracterizează printr-o mare coerență interioară ceea ce ne permite să vorbim de adevărul propozițiilor unui asemenea text, adevăr *relativ la* şi *funcție de* acest coerentism narativ. În primul rând trebuie spus că într-un asemenea text întâlnim multe propoziții care țin de starea actuală de lucruri (adevăruri factuale) prin care autorul îşi plasează acțiunea într-un anumit loc, într-un anumit moment etc. şi care reprezintă suportul logic al ficționalității. Dată fiind coerența lor interioară nu este lipsit de sens să ne întrebăm ce descriu asemenea texte? Pentru a răspunde acestor probleme

Toma Pavel foloseşte conceptul de *lume ficţională,* iar Umberto Eco pe cel de *lume posibilă.* Se naşte astfel o nouă manieră interpretativă dacă nu generată cel puţin alimentată de discuţiile logice asupra lumilor posibile (pentru detalii vezi anexa 1. Pentru problema obiectelor posibile dar intactuale care este o altă problemă foarte discutată în filosofia logicii modale cititorul poate consulta anexa 2.).

6) Problema pluralismului şi a relativismului logic.

Dezvoltarea extraordinară pe care a cunoscut-o logica în secolul nostru a avut ca rezultat, printre multe altele, apariţia unei multitudini de discipline şi teorii care toate poartă numele de "logică" Am văzut că logica modală şi logica polivalentă, pe care eu nu le despart, alimentează din plin acest pluralism logic. În primul capitol am reprodus reacţiile unor logicieni mai importanţi în legătură cu situaţia logicii polivalente în prima jumătate a acestui secol. Logica modală a mers în aceeaşi direcţie: dacă există atâtea sisteme modale care guvernează principiile unei inferenţe valide cum putem noi alege care dintre ele este cel mai bun? Care dintre ele reprezintă adevărata logică? Aceste probleme şi altele de acelaşi tip cu ele ne determină să regândim actuala organizare a ştiinţei logicii şi mai ales raporturile dintre aceste compartimente ale unei ştiinţe care se comportă ca un veritabil "univers în expansiune".

Anexa 1.

APLICAȚII ALE METODEI RAȚIONAMENTULUI DIAGONAL ÎN LOGICĂ

1. Metoda raționamentului diagonal este o metodă de demonstrare, şi anume, metoda prin care G. Cantor a demonstrat caracterul nenumărabil al mulțimii numerelor reale. Prin „mulțime nenumărabilă" înțelegem o mulțime ce nu poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale. Mulțimea numerelor pare, de exemplu, este o mulțime numărabilă; la fel mulțimea numerelor raționale. Dacă o mulțime infinită nu poate fi pusă în corespondență biunivocă cu o mulțime numărabilă, oricare ar fi ea, atunci ea este nenumărabilă. Voi ilustra acest concept cu ajutorul a două exemple.

Numerele reale din intervalul [0,1] pot fi date în forma unor fracții zecimale infinite. Dacă dezvoltarea zecimală a unei fracții este totuşi finită, atunci ultimul ei termen poate fi scris ca o succesiune infinită a cifrei 9. De exemplu, în locul lui 0,246

putem scrie 0,245999.... Toate numerele reale din intervalul [0,1] pot fi aranjate ca în tabelul de mai jos:

$0,X_{00}\,X_{01}\,X_{02}\,\ldots \quad (0)$
$0,X_{10}\,X_{11}\,X_{12}\,\ldots \quad (1)$
$0,X_{20}\,X_{21}\,X_{22}\,\ldots \quad (2)$
.....

Observăm că fiecărui număr natural îi corespunde un număr real din intervalul ales. Pe diagonală apare, însă, un alt număr, şi anume, O, $X_{00}\,X_{11}\,X_{22}$ ... care nu are un corespondent în mulţimea numerelor naturale. Prin urmare, mulţimea numerelor reale nu este numărabilă.

Putem raţiona analog şi pentru mulţimea funcţiilor aritmetice de un argument. De exemplu, $f(x) = 4x+1$, $g(x) = x^2-2$, $h(x) = 2x^2/_{x-3}$ sunt funcţii de un argument. Notăm aceste funcţii cu $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... şi formăm un tabel asemănător cu primul.

$F_0(0), f_0(1), f_0(2), \ldots$
$F_1(0), f_1(1), f_1(2), \ldots$
$F_2(0), f_2(1), f_2(2), \ldots$
.....

După cum observăm, pe diagonală apare funcţia $f_x(x)$. Definim acum o funcţie f(x) în felul următor: $f(x) = f_x(x)+1$. Presupunem că în enumerarea noastră f(x) are indicele k, deci

$f_k(x) = f_x(x)+1$. Întrucât k şi x au fost luate la întâmplare putem studia cazul particular în care x=k, adică $f_x(x) = f_x(x)+1$. Acest caz contravine, însă, principiului identității. Prin urmare, nici mulțimea funcțiilor aritmetice de un argument nu este numărabilă.

*

2. În legătură cu raționamentul (sau metoda) lui Cantor se ridică două probleme. Prima este filosofică însă ea a avut consecințe extrem de importante pentru matematică; a doua este matematică însă consecințle ei privesc de data aceasta filosofia.

În legătură cu prima problemă trebuie spus că adversarii teoriei mulțimilor au ridicat obiecții relativ la faptul că metoda lui Cantor *indică* fără *a construi*. Ce înseamnă acest lucru? În primul nostru exemplu doar se indică faptul că există un număr ce nu poate fi pus în corespondență cu un element al unei mulțimi numărabile fără ca acest număr să poată fi efectiv construit. Întrebarea este dacă din punct de vedere matematic o asemenea soluție poate fi luată ca valabilă, dacă asemenea existențe sunt legitime? Pentru matematicianul intuționist răspunsul este categoric negativ. În opinia matematicianului intuiționist demonstrația lui Cantor săvârşeşte două păcate: 1) admite ca valabile legi logice şi raționamente care nu deservesc ideea constructivității (sau efectivității) cum ar fi legea dublei negații, contrapoziția implicației, raționamentul prin reducere la absurd ş.a. În fond, demonstrația lui Cantor nu este altceva decât un caz particular de demonstrație prin reducerea la absurd. Iată

cum s-ar putea reda, foarte pe scurt, structura logică a acestui argument.

Notăm cu A propoziția „Mulțimea funcțiilor aritmetice de un argument nu este numărabilă". Facem acum supoziția: non-A. Conform tabelului, obținem *non* (*non-A*) care este echivalentă mai departe cu A. Prin urmare, în structura logică a argumentului intră două legi logice care nu sunt admise de logica intuționistă, şi anume, $\sim \sim A \equiv A$ şi $(\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$.

Am spus mai sus că argumentul lui Cantor indică fără a construi, că existența pe care o presupune acest argument este una neefectivă, o simplă posibilitate logică. Heyting exprimă acest lucru fără echivoc:

> Dacă „a exista" nu înseamnă „a fi construit" acesta ar trebui să aibe un sens metafizic. Nu este însă sarcina matematicii de-a investiga acest sens şi nici de a decide dacă acesta este valabil sau nu. Nu avem nici o obiecție împotriva faptului ca un matematician să admită în particular orice teorie metafizică ar dori, însă, programul lui Brouwer presupune că noi studiem matematica ca pe ceva simplu, mult mai imediat decât în metafizică. În studiul construcțiilor matematice mentale „a exista" trebuie să fie sinonim cu „a fi construit". [2; 67].

A doua problemă, despre care am spus că este matematică, se referă la problema continuului. Demonstrând nenumărabilitatea anumitor mulțimi, procedeul lui Cantor pune în evidență numere cardinale ce nu mai corespund unor mulțimi finite ci unor mulțimi infinite numai că aceste mulțimi nu sunt infinite în acelaşi fel. Să ne reamintim cu această ocazie câteva concepte ale teoriei mulțimilor.

Fie A o mulțime oarecare. Conform axiomei mulțimii potențiale, în raport cu orice mulțime A putem forma mulțimea submulțimilor ei. definită prin

(1) $$P(A) = \{X:X \subseteq A\}$$

De exemplu, dacă $A=\emptyset$, atunci $P(A) =\{\emptyset\}$, $P(PA) = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ etc. Dacă $A*$ este cardinalul mulțimii A, iar $P(A)*$ cardinalul lui $P(A)$, atunci între cele două are loc relați

(2) $$P(A)* = 2^{A*}$$

Întrucât $\aleph_0$ este cardinalul unei mulțimi numărabile, iar $\aleph_1$ cardinalul unei mulțimi nenumărabile (continue), relativ la succesiunea $\aleph_0$, $\aleph_1$, ... putem face supozițiile:

(3) $$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

(4) $$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$$

Relațiile (2) şi (3) sunt particularizări ale relației (1); relația (2) este cunoscută şi sub numele de *ipoteza restrânsă a continuului,* iar relația (3) sub numele de *ipoteza generalizată a continuului.* Conform rezultatelor lui Gödel şi Cohen, atât prima cât şi a doua ipoteză sunt consistente cu axiomele teoriei mulțimilor. Chiar dacă cele două relații nu se pot demonstra în sistemele formale ale teoriei mulțimilor (vezi Zermello -

Fraenkel sau Gödel - Bernays) ele se justifică logic prin faptul că nu conduc la contradicții. Interesul filosofic pentru acest gen de probleme este justificat din mai multe puncte de vedere. Să nu uităm că distincția continuu - discret ca şi distincția actual - potențial era cunoscută filosofilor încă din antichitate.

*

3. Raționamentul diagonal are şi unele aplicații logice foarte interesante. Trebuie precizat, însă, că aceste aplicații logice nu vizează caracterul continuu sau discontinuu al unor mulțimi ci probleme de un cu totul alt gen. Una din aplicațiile raționamentului diagonal se referă la expunerea făcută de Mostowski paradoxului lui Richard.

Să presupunem că dispunem de toate expresiile unui limbaj L care definesc proprietăți de numele. Notăm aceste proprietăți după modelul lui Gh. Enescu [1] cu *Rich* (0), *Rich* (1), ...; dacă un număr oarecare n nu are proprietatea „$Rich_i$" vom scrie „*non-*$Rich_i$(n)". Construim acum un tabel asemănător celor exemplificate deja:

$Rich_0$ (O), $Rich_0$ (1), $Rich_0$ (2), ...
$Rich_1$ (O), $Rich_1$ (1), $Rich_1$ (2), ...
$Rich_2$ (O), $Rich_2$ (1), $Rich_2$ (2), ...
.....

Pe diagonală se formează expresia $Rich_n$(n). Întrebarea este dacă putem găsi un număr k astfel că *non* - $Rich_k$ (k)? Dacă

da, atunci ea va fi tot o proprietate richardiană şi va trebui să aibe un indice, să zicem i. Se obţine astfel identitatea

(1) $Rich_i$ (k) = *non* - $Rich_k$ (k)

care, pentru cazul particular i=k duce la contraducţia

(2) $Rich_k$ (k) = *non* - $Rich_k$ (k)

Paradoxul lui Richard poate fi corelat din perspectiva raţionamentului diagonal cu conceptul de *adevăr* (la Tarski) şi cu conceptul de *demonstrabil* (la Gödel). În ce priveşte conceptul de *demonstrabil* aceste aplicaţii au fost iniţiate de Finsler şi au avut drept scop construirea unor propoziţii indecidabile (Finster l-a precedat pe Gödel dar spre deosebire de acesta el a utilizat o formă derivată a paradoxului lui Richard în care noţiunea de definiţie a fost înlocuită cu cea de derivare). Se introduce mai întâi definiţia:

(3) *non-*$Rich_k$(n) = $Rich_k$(n) nu este demonstrabilă.

Ceea ce în simbolismul lui Gödel s-ar traduce prin:

(7) $n \notin Rich_k = \sim Bew\ [Rich_k, (n)]$

Printr-un raţionament analog se obţine contradicţia

(8) *Bew* [$Rich_k$(n)] = ~ *Bew* [$Rich_k$(n)]

Notă: În simbolismul lui Gödel, *Bew* este forma prescurtată a termenului „demonstrabil".

*

4. Am atătat cu altă ocazie că raționamentul diagonal se poate aplica în semantica lumilor posibile cu privire la problema obiectelor posibile dar inactuale. Problema este foarte discutată în filosofia logicii modale, amănunte cititorul poate găsi în capitolul VIII al cărții lui Alvin Plantinga, *Natura necesității.*

Reamintesc pe scurt câteva din conceptele de bază ale acestui gen de semantică logică.

1) Tripletul (*G, H, R*) este o structură model în care *G* este mulțimea lumilor posibile, *H* este o lume posibilă (eventual lumea noastră), iar *R* este relația de accesibilitate.

2) Funcția ψ care asociază fiecărei lumi posibile $H \in G$ o mulțime ψ (*H*) numită *domeniul* lui *H*.

3) Obiectele unei lumi *H* pe care le vom nota cu O_1, O_2, ... (uneori se adaugă superscripte care indică lumea posibilă în domeniul căreia cad obiectele respective).

Relativ la domeniul unei lumi, S. Kripke face următoarea precizare:

În mod intuitiv ψ (*H*) este mulțimea tuturor indivizilor ce există în *H*. Desigur că ψ (*H*) nu trebuie să fie aceeaşi mulțime pentru diferite argumente *H*, aşa cum, intuitiv, în alte lumi decât cea reală unele lucrări actuale pot lipsi, în schimb, să apară altele noi în genul lui Pegas. [4; 85].

Lumile posibile din G, ca şi lucrurile care există în ele se pot ordona, conform schemei de mai jos:

$$\psi(H_0): O_0^0,\ O_1^0,\ O_2^0, \ldots$$
$$\psi(H_1): O_0^1,\ O_1^1,\ O_2^1, \ldots$$
$$\psi(H_2): O_0^2,\ O_1^2,\ O_2^2, \ldots$$

Mulțimea *G* este infinită, la fel lumile posibile din *G*. Dacă aşa stau lucrurile atunci putem forma o lume posibilă *H* care să difere de orice lume posibilă H_i prin acel obiect din H_i care are indicele de ordine i. Dacă $O_1, O_2, \ldots$ sunt elementele lumii H atunci:

$$O_1 \neq O_1^1$$
$$O_2 \neq O_2^2$$
$$O_3 \neq O_3^3$$

Presupunem acum că şi *H* are un număr de ordine, să zicem n. Aceasta este totuna cu a presupune că G este o mulțime infinit numărabilă. Conform supoziției noastre obiectele din *H*, respectiv $O_1, O_2, \ldots$ devin $O_1^n, O_2^n, \ldots$ ceea ce înseamnă că relațiile de mai sus se pot reformula astfel:

$$O_1^n \neq O_1^1$$
$$O_2^n \neq O_2^2$$
$$O_3^n \neq O_3^3$$

Întrebare: de cine diferă O_n^n ? Conform ipotezei inițiale el trebuie să difere de elementul cu indice n din *H*n, adică de el însuşi. Prin urmare, O_n^n este un obiect care diferă de orice obiect care există, inclusiv de el însuşi. A admite un asemenea obiect înseamnă, în alți termeni, a admite existența lucrului care nu există. După cum se cunoaşte, această problemă are o lungă şi celebră tradiție care merge înapoi până la Platon, dacă nu cumva chiar mai departe. Din punct de vedere logic acest rezultat exprimă faptul că domeniul general ψ (*G*) (= reuniunea domeniilor individuale) este domeniul de valori al formulei $\forall x \exists y (y \neq x)$ care este falsă în logica predicatelor. Aşadar, semantica standard este angajată față de ideea inconsistentă a existenței lucrurilor care nu există. Alvin Plantinga a obținut acelaşi rezultat însă cu alte mijloace. Se înțelege că problema nu se poate rezolva decât într-un singur mod: să admitem că G din (*G, H, R*) este infinit continuă şi nu infinit numărabilă cum apare ea la Kripke şi cum în mod obişnuit tratăm noi această mulțime. Două dintre tezele lui Plantinga par să susțină acest rezultat: 1) există oricât de multe lumi posibile, şi 2) orice lume posibilă există în oricare alta.

*

5. Faptul că mulțimea lumilor posibile este o mulțime infinit continuă și nu una discretă poate fi discutat din punct de vedere filosofic în moduri diferite. Nu intru deocamdată în acest gen de detalii ci voi încerca să arăt ce consecințe pot rezulta de aici asupra semanticii lumilor posibile.

Să discutăm pe scurt cazul particular în care mulțimea G conține doar două lumi posibile și anume H_1 și H_2. O propoziție p poate fi:

1) Adevărată în H_1 și în H_2,
2) Adevărată în H_1 și falsă în H_2,
3) Falsă în H_1 și adevărată în H_2,
4) Falsă în H_1 și în H_2

Dacă notăm adevărul cu 1 și falsul cu 0, celor patru cazuri de mai sus le corespund următoarele sisteme de valori: (11), (10), (01) și (00). Valoarea (11) corespunde primului caz; (10) corespunde celui de-al doilea și așa mai departe. Matricile de mai jos definesc o logică tetravalentă asociată cazului particular în care $G = \{H_1, H_2\}$:

P	~ P
(11)	(00)
(10)	(01)
(01)	(10)
(00)	(11)

→	(11)	(10)	(01)	(00)
(11)	(11)	(10)	(01)	(00)
(10)	(11)	(11)	(01)	(00)
(01)	(11)	(10)	(11)	(10)
(00)	(11)	(11)	(11)	(11)

V	(11)	(10)	(01)	(00)
(11)	(11)	(10)	(01)	(00)
(10)	(10)	(10)	(00)	(00)
(01)	(01)	(00)	(01)	(00)
(00)	(00)	(00)	(00)	(00)

V	(11)	(10)	(01)	(00)
(11)	(11)	(11)	(11)	(11)
(10)	(11)	(10)	(11)	(10)
(01)	(11)	(11)	(01)	(01)
(00)	(11)	(10)	(01)	(00)

În stabilirea acestor matrici am aplicat următoarele definiții pentru operatorii propozițiilor menționați:

$(\alpha,\beta) * (\tau,\upsilon) = (\alpha*\tau;\ \beta*\upsilon)$

$\sim (\alpha,\beta) = (\sim \alpha, \sim\beta)$.

De exemplu:

$\sim (0,1) = (\sim 0, \sim 1) = (1,0)$.

Cu ajutorul acestor matrici putem construi logica tetravalentă a lui Lukasiewicz. [6] Este uşor de arătat că dacă $G = \{H_1, H_2, H_3\}$ va rezulta o logică cu opt valori de adevăr: (111), (110), ..., (000). Tabelul de mai jos corelează cele două mulțimi G şi V (= mulțimea valorilor logice) şi numerele cardinale corespunzătoare lor (notate cu G^* respectiv V^*):

G^*	G	V^*	V
1	$G = \{H\}$	2	$V = \{1,0\}$
2	$G = \{H_1, H_2\}$	2^2	$V = \{11, 10, 01, 00\}$
3	$G = \{H_1, H_2, H_3\}$	2^3	$V = \{111, 110, ..., 000\}$

Observăm mai întâi că numărul valorilor de adevăr este funcție de numărul lumilor posibile şi este exprimat prin relația

$V^* = 2^{G^*}$. În semantica sistemelor modale de tip Lewis mulțimea G este infinită ($G^* = \aleph_0$) ceea ce face ca și mulțimea valorilor logice să fie infinită. Numai că în timp ce G este infinit discretă ($G^* = \aleph_0$), V este infinit continuă($V^* = \aleph_1$). În cunoscuta sa monografie *Many - Valued logies*, N. Rescher afirmă că nu există un sistem polivalent finit care să fie caracteristic pentru sistemele S1-S5. Aceasta înseamnă că sistemele finite conțin tautologii care nu sunt teoreme în S5 (și ca atare nici în S1-S4). Rescher apreciază aici raportul dintre polivalență și modalitate dintr-un punct de vedere sintactic, însă, el poate fi apreciat și semantic. Conceptele de lume posibilă și model scot în evidență de o manieră clară și convingătoare caracterul infinitist al sistemelor modale în cauză.

O serie de autori, începând cu Gödel, au reușit să demonstreze echivalența dintre sistemele lui Lewis și sistemele de logică intuiționistă în trecerea de la polivalență la modalitate, și invers. Rezultatul lui Gödel, notează Rescher, stabilește faptul că dacă luăm sistemul S4 ca fiind sistemul care guvernează conceptele modale, atunci toate teoremele calculului propozițional intuiționist devin teoreme în S4 și toate nonteoremele calculului propozițional intuiționist sunt nonteoreme în S4. [8; 20]

Cu aceste precizări să revenim la demonstrația pe care am dat-o prin metoda raționamentului diagonal în mulțimea lumilor posibile. Dacă demonstrația este corectă, atunci mulțimea lumilor posibile G este infinit continuă, cardinalul ei fiind $\aleph_1$. Înseamnă, așadar, că polivalența asociată acestor sisteme modale

este de cardinal $\aleph_2$. Prin urmare, logica modală şi implicit logica intuiţionistă sunt angajate din punct de vedere semantic faţă de ipoteza continuului atât în varianta ei restrânsă cât şi generalizată. Rămâne de văzut dacă acest fapt are consecinţe logice şi filosofice demne de a fi luate în considerare.

BIBLIOGRAFIE

1. Enescu, Gh., *Teoria sistemelor logice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1976.
2. Heyting, A., *Disputation*, în Benacetaf, P., şi Putnam, H., (eds) *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Cambridge University Press, 1997.
3. Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Publisching Company, Amsterdam, London, 1971.
4. Kripke, S., *Semantical Considerations On Modal Logic* în „Acta Philosophica Fennica", Nr. 16/1963.
5. Ladrière, J., *Les limitations internes des formalismes*, Louvain, Paris, 1957.
6. Lukasiewicz, J., *Selected Works*, North-Holland Pbl. Company, Amsterdam, London, Warszawa, 1970.
7. Rescher, N., *Topics in Philosophical Logic*, D. Reidel Publisching Company, Dordrecht-Holland, 1968.
8. Rescher, N., *Many-Valued Logics*, Mc Graw-Hill Kook Company, New York, St. Louis, London, Totonto, Mexic, 1969.

Anexa 2.

DE LA SEMANTICA LUMILOR POSIBILE LA SEMIOTICA NARATIVITĂȚII. OBSERVAȚII PE MARGINEA CONCEPTULUI DE LUME POSIBILĂ LA TOMA PAVEL ŞI UMBERTO ECO

După apariția, în 1932, a cărții lui C.I.Lewis şi C.H.Langford, ***Symbolic Logic***, o nouă orientare şi-a făcut apariția în dezvoltarea logicii modale. Axată în principal pe ideea de sistem sintactic şi sistem formal, această orientare este cunoscută astăzi sub numele de ***direcția sintactică*** în dezvoltarea logicii modale. Timp de câteva decenii atenția logicienilor s-a concentrat asupra construirii unor astfel de sisteme care să descrie într-o formă exactă şi completă proprietățile modalităților şi raporturile dintre ele. În fața acestei orientaări din logica modală s-au ridicat însă câteva probleme. Dacă sistemele respective descriu principile unei inferențe modale cum putem noi şti care dintre ele este cel mai bun? Întrucât fiecare sistem poate fi luat ca o definiție implicită a categoriilor de ***necesar***, ***posibil*** etc. cum poate fi evitat pericolul pluralismului şi al relativismului logic în

raport cu definițiile acestor categorii? În fine, cum se poate demonstra din punct de vedere semantic consistența și completitudinea sistemelor respective? Această problemă este de departe cea mai importantă pentru că de rezolvarea ei depind în esență, rezolvările celorlalte. Ceea ce presupune ea este un concept specific de ***validitate*** pentru logica modală.

Conceptul de validitate este un concept semantic iar conceptul de derivabilitate unul sintactic. Condiția de consistență cere ca orice expresie derivabilă să fie validă, iar condiția de completitudine cere ca orice expresie validă să fie la rândul ei derivabilă. Așadar, într-un sistem complet și consistent din punct de vedere semantic cele două concepte se suprapun exact, ele sunt coextensive. Atâta timp, însă, cât logica modală nu dispunea de un concept specific de validitate cele două proprietăți ale sistemelor formale nu puteau fi demonstrate.

Spre sfârșitul anilor cincizeci și începutul anilor șaizeci Saul Kripke publică cercetările sale de logică modală cunoscute de atunci și sub numele de "semantica lumilor posibile" sau "semantica în stil Kripke". Mult discutata problemă a validității în logica modală și-a găsit, în sfârșit, rezolvarea. S-au redeșteptat, totodată, vechile speranțe legate de posibilitatea valorificării filosofice a acestei discipline logice.

Esențială pentru semantica lumilor posibile este ideea lui Carnap de ***descriere de stare*** și ideea leibniziană de ***lume posibilă***. În ***Semnificație și necesitate***, Carnap definește descrierea de stare drept o "clasă de propoziții din S_1 care conține pentru orice propoziție atomară sau această propoziție sau negația

ei, dar nu pe amândouă, şi nu conţine alte propoziţii (...)"[1;52]. "Aşadar, continuă Carnap, descrierea de stare reprezintă lumile posibile ale lui Leibniz sau stările posibile de lucruri (state of affairs) ale lui Witgenstein". [1;52]. Presupunând că sistemul semantic S_1 conţine o singură variabilă individuală a şi trei constante F_1, F_2 şi F_3, vor exista, conform definiţiei lui Carnap, următoarele descrieri de stare:

$$\{F_1a,\ F_2a,\ F_3a,\}$$
$$\{F_1a,\ F_2a,\ \sim F_3a,\}$$
$$\{F_1a,\ \sim F_2a,\ F_3a,\}$$
$$.....$$
$$\sim F_1a,\ \sim F_2a,\ \sim F_3a,\}$$

În legătură cu relaţia dintre conceptele de adevăr şi descriere de stare Carnap face următoarea precizare: "există o descriere de stare şi numai una care descrie starea reală a universului; ea este aceea care conţine toate proprietăţile atomare adevărate precum şi negaţiile acelora care sunt false; ca urmare noi o vom numi descriere adevărată de stare. O propoziţie de o formă oarecare este adevărată dacă şi numai dacă ea are loc în descrierea adevărată de stare"[1;53]. Prin urmare, o propoziţie factual adevărată este o propoziţie care face parte din descrierea adevărată de stare. O propoziţie logic-adevărată sau L - adevărată, cum se exprimă Carnap, este o propoziţie adevărată în orice descriere de stare. În felul acesta Carnap reuşeşte să construiască o interpretare semantică pentru sistemul modal S5.

Dacă există o singură descriere de stare care descrie starea reală a universului, celelalte descriu doar stări posibile. De aici ideea că descrierile de stare corespund lumilor posibile la Leibniz. Această idee trebuie luată, totuşi, cu rezerve pentru că Leibniz înţelegea prin lume posibilă cu totul altceva. "Numesc lume, spune el, toată succesiunea şi toată colecţia de lucruri existente, în aşa fel încât să nu se poată spune că puteau exista mai multe lumi în timpuri diferite şi în locuri diferite. Căci ar trebui să le socotim pe toate laolaltă drept o lume sau, dacă preferaţi, drept un univers, şi când am umple toate timpurile şi toate locurile, la fel de adevărat rămâne faptul că le-am fi putut umple într-o infinitate de moduri şi că există o infinitate de lumi posibile dintre care Dumnezeu trebuie s-o fi ales pe cea mai bună, de vreme ce el nu face nimic fără să acţioneze conform raţiunii supreme"[5;93]. Dacă lumea noastră este singura care există aceasta se datorează faptului că ea este cea mai bună dintre lumile posibile pentru că "dacă nu ar fi existat cea mai bună (optimum) dintre toate lumile posibile Dumnezeu nu ar fi creat niciuna". [5;13]

Ideea că lumea noastră este cea mai bună dintre lumile posibile îl va inspira pe Voltaire în romanul său umoristic ***Candid***. Cu mijloace literare, gânditorul francez vroia să ilustreze câteva din neajunsurile concepţiei leibniziene, fără să bănuiască respectabilitatea pe care conceptul de lume posibilă o va dobândi în secolul nostru. Aceasta pentru că problema lumilor posibile apare la Leibniz şi într-un alt context, şi anume, în definiţia adevărurilor de raţiune sau a adevărurilor necesare: o propoziţie este necesar adevărată dacă este adevărată în toate lumile posibile

adică în toate lumile pe care Dumnezeu le-ar fi creat după un alt plan.

Ca şi în cazul ideii de raţiune suficientă la Leibniz (vezi principiul raţiunii suficiente), logica modală va prelua ideea de lume posibilă căreia îi va da o utilizare cu totul independentă de consideraţiile lui filosofice şi teologice. Pe scurt, categoriile cu care funcţionează semantica lumilor posibile s-ar putea prezenta astfel:

1) O mulţime de lumi posibile $W = \{W_1, W_2, ...\}$. Lumea noastră aparţine mulţimii W_1 ea este o lume posibilă de vreme ce este reală. Pentru consideraţiile ce vor urma, reţinem că mulţimea lumilor posibile este o mulţime infinită şi numărabilă.

2) Relaţia R de accesiblitate sau de posibilitate definită pe elementele mulţimii W; prin w_iRw_j înţelegem că lumea w_j este accesibilă lumii w_i sau că o propoziţie adevărată în w_j este posibilă în w_i. După cum observă Sorin Vieru într-un studiu care a adus pentru prima dată aceste probleme, relaţia de accesibilitate este punctul în care conceptul semantic de lume posibilă se îndepărtează cel mai mult de conceptul leibnizean.

3) Mulţimea de formule construite după regulile ştiute în sintaxa sistemului modal considerat.

4) Mulţimea celor două valori logice {1, 0} unde "1" reprezintă adevărul "0" falsul.

5) Funcţia de valorizare $V: F \times W \rightarrow \{1, 0\}$ care restrânge adevărul unei formule α la o lume posibilă sau la o submulţime (nestrictă) de lumi posibile din w. Prin $V(\alpha, w_i) = 1$ înţelegem că α este adevărată în lumea posibilă w_1.

Funcția V se definește inductiv după structura expresiei:

$V(\sim A, w_i) = 1$ dacă și numai dacă $V(A, w_i) = 0$,

$V(A \vee B, w_i) = 1$ dacă și numai dacă $V(A, w_i) = 1$ sau $V(B, w_i) = 1$,

$V(\Box A, w_i) = 1$ dacă și numai dacă $V(A, w_i) = 1$ și pentru orice $w_j \in W$ astfel că $w_i R w_j$ are loc $V(A, w_j) = 1$.

$V(\blacklozenge A, w_i) = 1$ dacă și numai dacă există cel puțin o lume posibilă $w_j \in W$ astfel că $w_i R w_j$ și $V(A, w_j) = 1$.

Observăm că necesarul se definește prin cuantificare universală relativ la mulțimea lumilor posibile, iar posibilul prin cuantificare existențială. Poate că nu este lipsit de importanță să notăm că în construcția sistemului său M, von Wright a pornit tocmai de la analogiile formale existente între operatori $\Box$, $\forall$, respectiv, $\blacklozenge$, $\exists$. Ciudat este că posibilitatea propozițiilor și lumilor posibile reprezintă două fețe ale aceleiași idei generale de posibil ceea ce face ca definițiile de mai sus să sufere de o evidentă circularitate. A spune că o propoziție este posibilă dacă este adevărată în cel puțin o lume posibilă nu face decât să adâncească neânțelegerile noastre cu privire la ideea de posibil. Sunt cât se poate de justificate strădaniile filosofilor și logicienilor de-a limpezi ideea de lume posibilă care în semantica modală este luată ca idee primă, (nedefinită). Jakkoo Hintikka, Alvin Plantinga, David Lewis, Nicholas Rescher și alți filosofi contemporani au încercat să construiască un concept de lume posibilă care să-și păstreze calitățile logice și care să fie apt preluării (și prelucrării) unor probleme filosofice. Este de remarcat faptul că definițiile lor au depășit astăzi granițele filosofiei putând fi întâlnite în domenii care nu țin strict de filosofie. Teoria ficționalității și semiotica

discursului narativ despre care va fi vorba în cele ce urmează reprezintă două exemplificări ale valorificărilor extralogice şi extrafilosofice ale conceptului de lume posibilă. Ceea ce a făcut posibilă aplicarea lui aici sunt, între altele, conceptele de ***carte a lumii*** (la Alvin Plantinga) sau de roman al lumii (la J. Hintikka).

Adevărul propoziţiilor, arată Alvin Plantinga, este determinat de stările de lucruri la care ele se referă astfel că există o corespondenţă biunivocă între propoziţiile adevărate dintr-o lume w şi stările de lucruri din acea lume. "Corespunzător fiecărei lumi posibile, precizează autorul, există o clasă unică de propoziţii C astfel că propoziţia P este un element al ei doar în cazul în care este imposibil ca w să fie actuală şi P să fie falsă. Numim această clasă ***cartea despre w***. Ca şi lumile posibile cărţile au proprietatea maximităţii: fiecare carte conţine, pentru orice propoziţie P, sau această propoziţie sau negaţia ei. Cartea despre lumea actuală, este, evident, mulţimea propoziţiilor adevărate." [7;194]

Prin conceptul de carte a lumii sau de "roman al lumii", cum se exprimă J. Hintikka, semantica lumilor posibile se deschide spre orizonturi teoretice noi, extralogice şi chiar extrafilosofice. Dacă fiecare lume posibilă îşi asociază o carte, firesc era ca întrebarea să se pună şi invers: fiecare carte descrie la rândul ei o lume? Ne poate ajuta conceptul de lume posibilă să înţelegem asemenea cărţi care pot avea ca destinaţie finală lumea reală dar care deschid discuţia şi despre alte lumi posibile? Evident nu este vorba de cărţile ştiinţifice care au ca obiect lumea reală deşi Popper nu ezită să vorbească şi aici despre o lume a treia, lume caracterizată de un gen de obiectivitate asemănătoare,

poate chiar identică obiectivității din lumea întâi (lumea existențelor fizice). Forțând puțin nota am putea spune că lumile posibile din descrierile lui Al Plantinga s-ar putea găsi printre "locuitorii" lumii a treia popperiene în ciuda faptului că lumea a treia ca şi lumea întâi şi a doua, de altfel, nu sunt gândite de Popper ca lumi posibile.

Cum era de aşteptat, aceste probleme nu-i sunt străine lui A. Plantinga şi în capitolul VIII din ***Natura necesității*** el reuşeşte să schițeze câteva puncte de vedere pe care le-am putea lua ca pe o primă încercare de abordare logică a ficționalității. Intenția lui era să dea şi o altă ilustrare demersului său ontologic dezvoltat în prima parte a lucrării, demers ce se vrea de acum a fi cât mai complet şi mai integrator. Aceste puncte de vedere nu au rămas fără ecou dacă ținem seama de numeroasele trimiteri care se fac la ***Natura Necesității*** într-o "luxuriantă" literatură de specialitate adunată între timp pe această temă. Cărțile lui Umberto Eco ***Lector in fabula*** (1987) şi ***Limitele interpretării*** (1992) precum şi cartea lui Toma Pavel ***Lumi ficționale*** (1984) pot fi considrate printre reuşitele acestor tentative de instrumentare a ficționalității axate în principal pe ideea de lume posibilă. Cei doi autori au găsit în ***Natura Necesității*** un prețios sprijin teoretic, iar în unele întreprinderi mai particulare au fost chiar inspirați de aceasta.

Pentru Toma Pavel filosofia lumilor posibile (cu referire expresă la Kripke şi Plantinga) sugerează idei şi concepte metodologice în poetica ficțiunii, domeniu pe care autorul îl plasează la confluența dintre critica literară şi filosofie. Conceptul de "lume ficțională" pe care îl propune reputatul profesor român

de la Harvard nu trebuie confundat cu conceptul de lume posibilă şi aceasta din trei motive. Întâi pentru că autorul unei opere de ficţiune ar trebui într-o asemenea eventualitate, să nu-şi creeze personajele sale ci doar să le identifice într-o presupusă lume posibilă unde ele ar trebui să existe independent de autor ca şi de cititor. Este ca şi când am spune că Dickens l-a descoperit pe Mr. Pickwick într-o lume posibilă aşa cum Adams şi Leverrier au descoperit planeta Neptun într-o lume posibilă care întâmplător s-a dovedit a fi lumea noastră. Apare apoi o stânjenitoare inabilitate în a distinge diferite tipuri de inactualitate care fac imposibilă sesizarea diferenţei dintre ficţiune şi simpla posibilitate nerealizată. În fine, o asemenea identificare ar avea consecinţe extrem de neplăcute în ceea ce priveşte ficţiunile necontradictorii, legitime, poate, prin efectele estetice ale unui text linear însă categoric respinse de unul logic. Absurdul logic este cu totul altceva decât absurdul artistic, iar o logică ce ar admite absurdul printre valorile ei de adevăr (cum este logica lui Bocivar, de exemplu) este total inaptă receptării unui text din Urmuz sau Ionescu. "Prezenţa contradicţiilor, conchide Pavel, ne împiedică în mod efectiv să reducem teoria ficţionalităţii la o teorie kripkeană a modalităţii" [6;80]

Dacă o semantică a ficţionalităţii se dovedeşte greu de realizat, o tipologie a lumilor posibile pere în schimb o întreprindere mult mai rentabilă şi acesta este de fapt scopul principal al lucrării lui Toma Pavel. Prin această tipologie a lumilor ficţionale el încearcă să răspundă la trei mari categorii de probleme pe care le ridică înţelegerea operei de ficţiune: 1)

probleme ***metafizice*** privind statutul ontologic al obiectelor ficționale şi adevărul ficțional, 2) probleme ***demarcaționale*** cu privire la posibilitatea fixării unor criterii sigure de delimitare între ficțional şi nonficțional, şi, 3) probleme instituționale cu privire la locul şi rolul ficțiunii înțeleasă de data aceasta ca "instituție culturală".

Buna primire de care s-a bucurat cartea lui Toma Pavel din partea criticii de specialitate reprezintă cea mai sigură atestare a rezultatelor obținute de el pe cele trei liniamente metodologice schițate foarte pe scurt mai sus. desigur lucrurile nu s-au oprit aici iar precauțiile pe care el le-a semnalat nu au fost resimțite peste tot şi întotdeauna la fel. Mult mai aproape de spiritul logicii modale se va plasa Umberto Eco într-o "strategie interpretativă" ce reface în linii mari traseul parcurs de Al. Plantinga în ***Natura Necesității***. Pentru reputatul semiolog italian conceptul de lume posibilă ar putea fi reajustat în aşa fel încât să răspundă şi într-un alt mod problemelor pe care le discută semiotica discursului narativ. În ce constau, însă, aceste "reajustări"? În primul rând lumile posibile nu mai sunt privite ca structuri abstracte, vide de orice materialitate interpretativă, ci sunt "mobilate" astfel încât să poată satisface atitudinile propoziționale ale unui subiect anume (autor, cititor sau chiar personaj). Ca şi T. Pavel, Eco nu poate trece indiferent pe lângă faptul că în primele studii destinate semanticii modale S. Kripke invocă relativ la lumile posibile personaje ficționale - Pegas, Sherlock Holmes şi altele de acest gen. Ele nu există în lumea actuală ci în alte lumi posibile de aceea nu este deplasat să privim aceste lumi ca "lumi pline", ca

"ansambluri de indivizi înzestrați cu proprietăți" [2;177]. Pericolul de a reduce teoria narativității la o simplă logică a contrafactualilor ne obligă, într-un fel, să recurgem la această idee de lume posibilă. Acuzația de substanțialism cu care ar putea fi ea întâmpinată este respinsă de Eco pe considerentul că putem vorbi despre semnificația unei lumi posibile aşa cum vorbim despre semnificația oricărei expresii. De altfel, ideea pe care încearcă el să o acrediteze este că semnificația operei narative poate fi abordată în termenii unui ansamblu structurat de lumi posibile. Regulile de transformare a acestor lumi posibile reprezintă problema principală ce cade în sarcina unei semiotici a discursului narativ.

Pe de altă parte lumile posibile, inclusiv lumea reală, sunt ***constructe culturale***, ele depind de cunoştinţele şi schemele noastre conceptuale la un moment dat. "O lume posobilă poate face parte sin sistemul conceptual al unui subiect oarecare şi depinde de schemele conceptuale. Conform ideii lui Hintikka, lumile posibile se împart în cele care corespund atitudinilor noastre propoziționale şi cele care nu corespund." [2;182]

Cum trebuie să înțelegem această afirmație? O lume posibilă narativă este rezultatul interacțiunii dintre text şi cititor, ea depinde de ***Enciclopedie*** (ansamblul cunoştinţelor activate de cititor în receptarea textului narativ). Un cititor care nu cunoaşte istoria grecilor va vedea în Iliada o complicată țesătură de personaje şi întâmplări care se pot constitui într-o lume posibilă, însă, această lume este considerabil mai săracă decât lumea cititorului avizat. A reduce aceste lumi doar la simple jocuri de

imaginație așa cum au propus unii, înseamnă a nu înțelege esența problemei pentru că aceste lumi își dovedesc utilitatea în cel puțin trei împrejurări. În fine, aceste lumi narative sunt adeseori mijloacele noastre de cunoaștere a lumii de referință. descrierea Troiei în lumea narativă a ***Iliadei*** , ca să luăm un exemplu elementar, l-a ajutat pe Schleimann să descopere adevărata Troie și să adauge astfel Enciclopediei lucruri noi pe care nu le-am fi putut dobândi decât în acest mod.

Din punct de vedere logic ideea că lumile posibile sunt relative la schemele noastre conceptuale a fost susținută, între alții, de J. Hintikka și de N. Rescher. În studiul său ***Are Logical Truth Tautologies?*** Hintikka arătase că plecând de la combinațiile aceloraşi concepte-proprietăț pot fi construite lumi posibile în care obiectele sunt coagulări spațio-temporale" (U. Eco) ale acestor proprietăți după reguli dinainte stabilite. Dacă F_1 = rațional și F_2 = biped pentru a da o matrice de lume

	F_1	F_2
a_1	1	1
a_2	1	0
a_3	0	1
a_4	0	0

în care a_1 ... a_4 sunt obiecte ce satisfac combinațiile celor două proprietăți. Pentru că în lumea noastră toate ființele raționale sunt bipede, am putea spune că aparțin acestei lumi doar a_1, a_3 și a_4 în

timp ce a_2 nu aparține. O lume w caracterizată de o proprietate l se poate defini atunci prin funcția de apartenență, la fel ca oricare mulțime.

$$F_w(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in w \\ 0 \text{ dacă } x \notin w \end{cases}$$

1 şi 0 simbolizează aici adevărul respectiv falsul. Dacă $F_w(a_1) = F_w(a_3) = F_w(a_4) = 1$ atunci $\{ a_1, a_3, a_4 \} \subset \psi(w)$ unde $\psi(w)$ reprezintă, ca şi până acum domeniul lumii w. Proprietățile F_1, F_2 ... țin

de lumea reală, ele sunt introduse prin concepte ce compun propriile noastre scheme conceptuale ceea ce înseamnă că: lumile posibile sunt dependente de anumite scheme conceptuale şi în această calitate ele sunt constructe culturale, şi 2) nici o lume posibilă nu poate fi privită drept o alternativă absolută a lumii reale. Materia primă, dacă ne putem exprima astfel, a oricărei lumi posibile aparține lumii reale, ceea ce nu aparține lumii reale este doar o altă organizare logică a ei. Un obiect care ar satisface alte combinații de proprietăți decât obiectele lumii reale aparține altei lumi posibile. Prin urmare a construi o lume posibilă nu înseamnă din acest punct de vedere decât "a atribui proprietăți date unui anumit individ". (Hintikka). Conform schemei lui Rescher, următoarele condiții sunt atuci suficiente pentru construirea unei lumi posibile:

(1) o mulțime de indivizi $a_1, a_2, \ldots a_n$.

(2) o familie de proprietăți atribuite indivizilor.

(3) o specificare de esențialitate pentru diferitele proprietăți ale indivizilor.

(4) Relații între indivizi eventual între indivizi şi proprietăți.

Fie w1 şi w2 două lumi posibile caracterizate prin proprietățile F_1, F_2, F_3 conform celor două matrici de mai jos.

W_1	F_1	F_2	F_3
a_1	(1)	(1)	1
a_2	1	0	0

W_2	F_1	F_2	F_2
b_1	(1)	(1)	1
b_2	1	0	(0)
b_3	(1)	(0)	(1)

Cifrele 1 şi 0 ne arată că obiectele au (sau nu au) aceste proprietăți iar în punerea lor în paranteză marchează faptul că obiectele în cauză au (sau nu) aceste proprietăți în mod esențial. Un obiect b din w_2 este ***varianta potențială*** a obiectului din w_2 dacă au împreună aceleaşi proprietăți esențiale şi diferă doar prin proprietăți accidentale. Problema identității transmundane constă atunci în a stabili variantele potențiale ale unui obiect dintr-o anumită lume posibilă. Sigur că nimic nu ne împiedică să aducem în discuție şi o altă lume posibilă în care să apară o proprietate în

plus, să zicem F_4. Obiectele din W_1 corespund în cazul acesta variantelor lor potențiale din W_3 care au în raport cu F_4 valoarea 0. În baza acestei reguli noi putem identifica personajele omonime a două lumi narative diferite cum ar fi lumile din ***Oedip rege*** şi ***Oedip la Colonos*** de exemplu. Aceeaşi regulă ne dă dreptul să spunem că Agamemnon din ***Orestia*** este identic cu Agamemnon din ***Iliada***.

Un obiect W_3 este ***supranumerar*** față de obiectele din W_1 dacă diferă de acestea atât prin proprietățile esențiale cât şi accidentale. Tezeu din ***Oedip la Colonos*** este supranumerar față de personajele lui ***Oedip rege*** din aceleaşi motive din care b_3 vin W_2 este este supranumerar față de W_1. Accesibilitatea de la o lume la alta este dată între altele şi de raporturile dintre obiecte în baza cărora noi putem spune care lume este mai complexă şi de ce. Problema accesibilității dintre lumile narative devine în cazul de față mult mai complicată iar posibilitățile noastre interpretative depind în mare măsură de stabilirea acestor accesibilități.

Obiectele au proprietățile esențiale în lumile narative în care ele există însă trebuie precizat că esențialitatea narativă nu este totuna cu esențialitatea logică. La Eco, cel puțin, esențialitatea narativă funcționează ca principiu de identificare şi constă din totalitatea relațiilor pe care obiectele le stabilesc în lumile narative în care ele există şi care sunt accesibile. Noi nu-l putem identifica pe Oedip altfel decât ca rege al Tebei, ca fiu al lui Lajos, ca fiu dar şi ca soț al Iocastei şi aşa mai departe. Aceste proprietăți numite de Eco ***structural necesare***, țin de topic şi nu pot fi modificate fără modificarea topicului. O proprietate

structurală necesară nu contravine, însă, proprietăților logic necesare de aceea şi în domeniul faptelor narative funcționează până la urmă aceeaşi logică. Tocmai pentru că necesitatea narativă presupune ca pe o condiție a sa necesitatea logică, lumile narative au putut fi tratate ca lumi (logic) posibile. Există o adevărată constelație de astfel de lumi ce pot fi grupate în trei mari categorii - lumile cititorului, lumile autorului şi lumile personajelor. Sigur că putem vorbi şi aici despre lumi imposibile, lumi în care numărul şaptesprăzece, să zicem, este număr par însă aceste lumi sunt mai degrabă numite decât construite. Pentru a fi în ton cu principiile de constructivitate pe care le-am amintit la început ar trebui să dăm regulile de construcție ale unui asemenea obiect, ceea ce este, evident, absurd.

Dacă lumile narative rezultă din interacțiunea dintre text şi cititor, ele ne apar ca lumi ale cititorului, lumile personajelor sunt în schimb cu totul altceva. În esență aceste lumi sunt imaginate de personaje în funcție de ipostazele prin care trec ele în lumea narativă a textului. De cele mai multe ori aceste lumi reprezintă pentru autor mijloacele prin care sunt introduse proprietățile structural - necesare. Când Oedip îl acuză pe Creon că vrea să-i ia tronul el angajează o lume posibilă în care Creon este uzupator iar Tiresias, profetul, este unealta sa. Există, aşadar, o lume W_0 a lui Oedip şi o lume W_1 a profetului în care zeii i-au descifrat adevărata dramă a lui Oedip. În lumea W_0 a lui Oedip există:

1) Laios ucis de un necunoscut x şi părinte al unui y pierdut,
2) Creon, fratele Iocratei şi uzurpator al tronului lui Oedip,
3) Iocasta, mama unui y pierdut şi soția lui Laios.

În W_2, lumea lui Tiresias, au dispărut x şi y în schimb există:

1) Oedip, care l-a ucis pe Laios,

2) Creon, acuzat pe nedrept de Oedip,

3) Iocasta, mama lui Oedip, devenită între timp soția acestuia.

Personajele sunt practic aceleaşi însă proprietățile lor S - necesare s-au schimbat. Aceasta face ca accesibilitatea de la W_0 la W_1 să fie pentru moment suspendată şi să nu funcționeze decât accesibilitatea de la W_1 la W_0. Drama lui Oedip începe practic când cele două lumi devin reciproc accesibile. Dacă Iocasta se sinucide şi Oedip îşi scoate ochii este pentru că, în felul său, fiecare refuză această lume de care nu se simte responsabil şi pe care nu o poate în nici un caz accepta. Dramatismul personajelor lui Sofocle se datorează modului în care îşi împlinesc destinul în încercările lor zadarnice de a-l schimba.

Reținem, în concluzie, două mari probleme ce cad în sarcina semanticii narative. Pe de-o parte identificarea diferitelor lumi posibile conform tipologizărilor despre care am vorbit, iar pe de altă parte stabilirea accesibilităților din toate aceste lumi. Ce se înțelege prin "accesibilitate" în cazul de față? O lume w_j este accesibilă lumii w_i dacă "din structura lumii w_i este posibil să se genereze prin manipularea raporturilor dintre indivizi şi proprietăți, structura lumii w_j" [2;32]. Este exact ce s-a întâmplat în lumile narative exemplificate după tragediile lui Sofocle unde x şi y personaje neidentificate în w_0 devin personaje determinate în w_1. Pentru că aceste relații sunt dependente în dinamica lor de foarte mulți factori ele nu pot face obiectul unor tipologizări aşa

că nici semiotica narativă nu se poate dezvolta într-un calcul al lumilor posibile. Dacă şi fără această aptitudine a prelucrării lor matematice (sau poate tocmai de aceea), lumile narative îşi dovedesc utilitatea lor în ce priveşte înţelegerea marilor probleme pe care le ridică posibilismul acestei lumi. Avem toate motivele să credem că străduaniile filosofilor de-a elibera conceptul de lume posibilă de constrângerile unei prea severe rigori logice au fost răsplătite şi că valorificările lui filosofice nu se vor opri aici.

BIBLIOGRAFIE

1. CARNAP, R., *Semnificaţie şi necesitate*, Cluj, Editura Dacia, 1972.
2. ECO, U., *Lector in fabula*, Bucureşti, Editura Univers, 1991.
3. ECO, U., *Limitele interpretării*, Constanţa, Editura Pontica, 1996.
4. HINTIKKA, J., *Are Logical Truth Tautologies?* în HINTIKKA, J., *Logic, Language - Games and Information*, Oxford at the Clarendon Press, 1973.
5. LEIBNIZ, G., *Eseuri de teodice*, Iaşi, Editura Polirom, 1997.
6. PAVEL, T., *Lumi ficţionale*, Bucureşti, Editura Minerva, 1992.
7. PLANTINGA, A., *Transworld Identity or Worldbound Individuals*, în Munitz, M. (ed), *Logic and Ontology*, New York University Press, 1973.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARA TIMIŞOARA